Décomposition triangulaire de systèmes polynomiaux

Soit k un corps et $x_1 < x_2 \ldots < x_n$ des variables ordonnées. Un ensemble T de polynômes de $k[x_1, \ldots, x_n]$ est triangulaire si pour tout i il existe au plus un polynôme p de T tel que x_i soit la plus grande des variables apparaissant dans p. Ces ensembles permettent de lire facilement des propriétés géométriques. Il est néanmoins préférable de leur imposer des conditions supplémentaires pour optimiser cette lisibilité et leur fournir des caractéristiques géométriques intrinsèques satisfaisantes. Par exemple, le degré de la variété du système peut être surestimé. L'ajout de propriétés supplémentaires permettra alors de lire directement ce degré, notamment en rendant les polynômes square-free dans des tours d'extensions.

La résolution symbolique de systèmes d'équations algébriques par le calcul d'une famille d'ensembles triangulaires de polynômes n'est véritablement étudiée que depuis les travaux de Wu Wen-Tsun. Différents algorithmes calculant des décompositions triangulaires à partir d'un ensemble fini de polynômes ont été présentés depuis [6] par des auteurs tels que M. Kalkbrener, D. Lazard ou D. Wang. Les conditions imposées aux ensembles triangulaires varient d'une méthode à l'autre. Il en va de même concernant la relation entre les zéros communs des polynômes de départ et les ensembles triangulaires calculés.

Nous rappelons la notion fondamentale de saturé d'un ensemble triangulaire T. Nous prouvons que cet idéal, noté $sat(T)$, est un idéal fortement équidimensionnel. Cette propriété permet de montrer l'équivalence de la notion de chaîne régulière de M. Kalkbrener avec la définition plus simple d'ensemble triangulaire régulier que nous introduisons. A tout ensemble triangulaire régulier, on peut associer un produit de corps. On dispose ainsi d'une bonne structure pour le développement d'algorithmes efficaces. On peut en particulier calculer de manière dynamique, à l'aide de scindages, le pgcd de polynômes modulo un ensemble triangulaire; nous présentons un algorithme basé sur la technique des sous-résultants.

La méthode de décomposition proposée par M. Kalkbrener permet de calculer une famille $T_1, \ldots, T_s$ de chaînes régulières telle que $\sqrt{I} = \cap_{j=1}^{s} \sqrt{sat(T_j)}$. Nous développons cette approche et présentons de nouveaux algorithmes de calcul de partie sans facteur carré et de normalisation qui nous permettent de calculer des ensembles triangulaires qui ont des propriétés plus intéressantes. On obtient ainsi des spécifications plus fortes, par exemple des décompositions triangulaires de la forme $\sqrt{I} = \cap_{j=1}^{s} sat(T_j)$.

Nous présentons notre implantation en AXIOM des algorithmes ci-dessus et son efficacité sur des exemples classiques ainsi que sur quelques applications (compression d'images par bancs de filtres, problème des n-corps en mécanique céleste, calcul de bases de Groebner triangulaires d'idéaux de Galois en théorie de Galois effective).

Références

[1] Aubry P., Lazard D., Moreno Maza M. (1999). *On the theories of triangular sets*, Journal of Symbolic Computation, à paraître.

[2] Aubry P., Moreno Maza M. (1999). *Triangular Sets for Solving Polynomial Systems : a Comparative Implementation of Four Methods*, soumis à Journal of Symbolic Computation.

[3] *Ensembles triangulaires de polynômes et résolution de systèmes algébriques. Implantation en Axiom*(1999). Thèse de doctorat de l'Université Paris 6.

[4] D. Wang(1993). *An elimination method for polynomial systems*, Journal of Symbolic Computation, **16**, 83-114.

[5] D. Lazard(1992). *A new method for solving algebraic systems of positive dimension*, Discr. App. Math, **33**, 147-160.

[6] W. T. Wu(1987). *A Zero Structure Theorem for polynomial equations solving*, MM Research Preprints, **1**, 2-12.