Tables des relations de la fonction zéta colorée

M. Bigotte, G. Jacob, N.E. Oussous et M. Petitot

LIFL, Bât. M3–Informatique, Université de Lille 1

59655 Villeneuve d'Ascq Cedex France

Tel: [33] 03 20 43 47 24 email: {bigotte,jacob,oussous,petitot}@lifl.fr

5 février 1999

Résumé

Cet exposé présente la suite du travail effectué dans l'article [3]. Ce dernier décrit l'utilisation des algèbres de Lie et algèbres de mélange pour l'étude de la fonction zéta, définie pour tout entier $k > 0$ donné et pour tout multi-indice $s = (s_1, \ldots, s_k)$ tel que $s_1 > 1$ et $s_2, \ldots, s_k > 0$, par :

$$\zeta(s) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k > 0} \frac{1}{{n_1}^{s_1} \cdots {n_k}^{s_k}} \tag{1}$$

Le but de l'article [3] était de donner une méthode pour engendrer les tables de la fonction zéta multi-indicée, et de présenter ces tables jusqu'à l'ordre 10 (somme maximale des multi-indices).

Ce travail nous a amené à nous intéresser à une définition généralisée de la fonction zéta : pour tous multi-indices $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, avec $\sigma_i \in \mathcal{O}_n$ (groupe des racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité), et $s = (s_1, \ldots, s_k)$ tel que $s_2, \ldots, s_k > 0$ et $s_1 > 1$ si $\sigma_1 = 1$ sinon $s_1 > 0$, on pose [1, 4] :

$$\zeta(s; \sigma) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k > 0} \frac{{\sigma_1}^{n_1} \cdots {\sigma_k}^{n_k}}{{n_1}^{s_1} \cdots {n_k}^{s_k}} \tag{2}$$

Avec l'ajout des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité [4], notre motivation est de présenter l'étude et la méthode qui nous ont permis de construire les tables des relations entre les valeurs de la fonction zéta généralisée.
Les premiers outils nécessaires à la construction des tables sont deux alphabets X et Y auxquels sont respectivement associés deux produits de mélange $ш$ [7] et $*$ [2]. La fonction zéta peut être définie, soit par les intégrales itérées, soit par les fonctions quasi-symétriques [8]. Les égalités entre les intégrales itérées (respectivement les fonctions quasi-symétriques) sont codées par l'alphabet X

(respectivement Y) et le produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$ (respectivement $*$). Ces égalités codées permettent d'obtenir des relations entre les valeurs de la fonction zéta dans $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ et $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$. En utilisant un codage des valeurs de la fonction zéta par les mots et le fait que les mots de Lyndon [5, 7] constituent une base de transcendance de l'algèbre de mélange [6, 7], nous calculons un idéal des relations polynomiales (à coefficients dans $\mathbb{Q}$) reliant les valeurs de la fonction zéta, triées dans l'ordre par longueur (somme des éléments du multi-indice), qui vérifie la conjecture des dimensions de Zagier [9].

Références

[1] J.M. Borwein, D.M. Bradley, and D.J. Broadhurst. Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums : a compendium of results for arbitrary k. *to appear in Electronic J. Combinatorics*, 1996.

[2] D.J. Broadhurst. Massive 3-loop feynmann diagrams reductible to sc^* primitives of algebras of the sixth root of unity. Technical report, Physics Deparment, Open University, U.K., 1998.

[3] M. Hoang Ngoc and M. Petitot. Mots de lyndon, polylogarithmes et fonction ζ de riemann. *submited to Discret Maths*, 1998.

[4] M.E. Hoffman. Quasi-shuffle hopf algebras. Technical report, Mathematics Departement, U.S. Naval Academy, Annapolis, 1998.

[5] G. Melançon and C. Reutenauer. Lyndon words, free algebras and shuffles. Publication du LITP Paris et UQAM Montreal 87–63, Université Paris VII et Université du Quebec, 1987.

[6] D.E. Radford. A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes. *Journal of Algebra*, 58:432–454, 1979.

[7] C. Reutenauer. *Free Lie Algebras*, volume New Series-7 of *London Mathematical Society Monographs*. Oxford Science Publications, 1993.

[8] C. Reutenauer and C. Malvenuto. Duality between quasi-symetric functions and the solomon descent algebra. *J. of Algebra*, pages 967–982, 1995.

[9] D. Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics*, volume 2, pages 497–512. Birkhäuser, 1994.