Delphine Boucher

LACO

Proposition d'exposé - Résumé - 08/02/99

Problèmes liés à la résolution d'équations différentielles linéaires dépendant de paramètres.

Soit $L = a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$ un opérateur différentiel à coefficients dans $K[x]$.
Supposons tout d'abord que K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Un des problèmes de la théorie de Galois différentielle est de caractériser le groupe de Galois différentiel de l'équation $L(y) = 0$ (c'est à dire les relations algébriques entre les différentes solutions et leurs dérivées). On ne sait pas encore résoudre ce problème dans sa généralité. Cependant, on sait décrire les solutions polynomiales, rationnelles, exponentielles (solutions dont la dérivée logarithmique est rationnelle) ou liouvilliennes (c'est à dire les solutions obtenues par adjonctions successives d'exponentielles, d'exponentielles d'intégrales et de fonctions algébriques). Enfin, de nombreux algorithmes existent pour calculer de telles solutions. En particulier le calcul des solutions liouvilliennes peut se ramener à des calculs de solutions rationnelles ou exponentielles à des équations auxiliaires.

Supposons maintenant que les coefficients a_k de l'opérateur soient des polynômes à coefficients dans $K = \overline{\mathbb{Q}}(M_1, \ldots, M_s)$ où $M_1, \ldots, M_s$ sont des paramètres. Notons $\underline{M} = (M_1, \ldots, M_s)$ et $L_{\underline{M}}$ le nouvel opérateur. Le but est de rechercher pour quelles valeurs des paramètres $m_1, \ldots, m_s$ l'équation $L_{\underline{m}}(y) = 0$ a des solutions exponentielles et éventuellement les calculer.
Tout comme dans le cas non paramétré, toute solution exponentielle z est telle que sa dérivée logarithmique appartienne à $K(x)$. De plus, cette dérivée peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{z'(x)}{z(x)} = \sum_{\text{fini}} \mathcal{P}_i(x) + \frac{q'(x)}{q(x)}$$

où q est un polynôme et les $\mathcal{P}_i$ sont les parties exponentielles au voisinage des points singuliers de l' équation (c'est à dire les racines de a_n et l'infini). Nous supposerons que ces points sont indépendants des paramètres.
Nous allons tout d'abord montrer qu'il est possible de décrire les parties exponentielles en fonction des paramètres.
En effet nous allons construire un nombre fini d'ensembles de conditions semi-algébriques (du type $= 0$ ou $\neq 0$) pour chacun desquels nous serons dans une situation similaire à la situation non paramétrée. Nous pourrons alors effectuer les mêmes raisonnements pour trouver les parties exponentielles possibles. Nous obtenons finalement un nombre fini d'ensembles E de conditions à chacun desquels nous associons un nombre fini de parties exponentielles.

Pour chacun des ensembles E, il reste alors à déterminer pour quelles valeurs des paramètres $m_1, \ldots, m_s$ l'équation $\tilde{L}_{\underline{m}}(y) = 0$ vérifiée par q a des solutions polynomiales. Au premier abord on pourrait penser que ce dernier problème est plus facile que le précédent. En effet dans le cas non paramétré il se ramène à la résolution de deux équations dans $\mathbb{N}$ (celles de la valuation et du degré) puis d'un système linéaire. Or la présence des paramètres va engendrer plusieurs difficultés :

- Problème d'indécidabilité : il n'existe pas d'algorithme qui, étant donnée une équation différentielle linéaire dépendant de paramètres, décide pour quelles valeurs des paramètres cette équation a des solutions rationnelles. Ceci est lié à la résolution d' équations diophantiennes qui peuvent apparaître lors de la recherche du degré et de la valuation de la solution polynomiale.

- Décider pour quelles valeurs des paramètres $m_1, \ldots, m_s$ un polynôme de $K[x]$ a une solution entière positive (qui correspond à la valuation ou au degré).

Dans la suite, nous faisons abstraction de ces deux obstacles. Il reste alors un problème majeur :

- Déterminer pour quelles valeurs des paramètres un système linéaire de taille inconnue a une solution non nulle. Cette situation se produit lorsque le degré de la solution polynomiale recherchée dépend des paramètres.

Face à cette dernière difficulté, nous nous contentons donc d'exhiber des classes d'équations différentielles pour lesquelles nous pouvons trouver ou bien des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions polynomiales ou bien des conditions suffisantes.

Nous illustrerons la recherche des solutions exponentielles sur l'exemple d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux dépendant de deux paramètres. Après avoir calculé les parties exponentielles possibles en fonction des paramètres, nous serons ramenés à étudier l'existence de solutions polynomiales à quatre équations. Pour deux d'entre elles, de type hypergéométrique, nous savons résoudre le problème; pour les deux autres, la question de la recherche de l'existence de solutions polynomiales reste encore ouverte.