Un algorithme de reconnaissance des treillis engendrés par duplications d'ensembles convexes

Nathalie Caspard, CERMSEM, Paris 1
(avec Karell Bertet, LIAFA, Paris 7)

Nous nous intéressons ici à la notion de *duplication d'ensembles convexes dans les treillis*, opération de type constructif introduite par Day en 1970 [2] et permettant de passer d'un treillis L à un nouveau treillis $L' = L[C]$ par la duplication d'un sous-ensemble convexe C de L (on montre aisément que la duplication d'un ensemble C dans un treillis génère un treillis si et seulement si C est convexe). La classe $1[\mathcal{C}]$ de tous les treillis engendrés à partir du treillis $\mathcal{Q} = (\{0,1\}, \leq)$ à deux éléments par de telles duplications successives a été étudiée essentiellement par Day [3] et Geyer [5]. Nous proposons ici un algorithme de reconnaissance des treillis de cette classe, obtenu à partir du *théorème de duplication* (autre résultat non développé dans ce résumé), qui caractérise le fait qu'un treillis est obtenu à partir d'un autre par la duplication d'un convexe. Nous rappelons tout d'abord la définition de la duplication d'un convexe.

Définition 1 *Soit $L = (L, \leq)$ un treillis et $C \subseteq L$ un sous-ensemble convexe de L. Alors le nouveau treillis $L' = L[C]$ défini sur l'ensemble $(L - C) + (C \times \mathcal{Q})$ est donné par l'ordre $\leq'$:*

$$x' \leq' y' \iff \begin{cases} x', y' \in (L - C) \text{ et } x' \leq y' \text{ dans } L, \text{ ou} \\ x' \in (L - C),\ y' = yi \in (C \times \mathcal{Q}) \text{ et } x' \leq y \text{ dans } L, \text{ ou} \\ x' = xi \in (C \times \mathcal{Q}),\ y' \in (L - C) \text{ et } x \leq y' \text{ dans } L, \text{ ou} \\ x' = xi \in (C \times \mathcal{Q}),\ y' = yj \in (C \times \mathcal{Q}),\ x \leq y \text{ dans } L \\ \text{et } i \leq j \text{ dans } \mathcal{Q}. \end{cases}$$

Nous utilisons des relations binaires appelées *relations-flèche* définies entre les éléments sup-irréductibles (éléments possédant une unique couverture inférieure) et inf-irréductibles (éléments possédant une unique couverture supérieure) d'un treillis. Ces relations furent développées par Wille [6] et l'"école de Darmstadt", [4]).

Définition 2 *Soit j un sup-irréductible et m un inf-irréductible d'un treillis L.*

1. $j \downarrow m$ si j est un élément minimal de l'ensemble $\{t \in L :\ t \not\leq m\}$.
2. $j \uparrow m$ si m est un élément maximal de l'ensemble $\{t \in L :\ j \not\leq t\}$.
3. $j \updownarrow m$ si $j \downarrow m$ et $j \uparrow m$.
4. $j \downarrow_{\cdot} m$ si $j \downarrow m$ et $j \not\uparrow m$.
5. $j \uparrow_{\cdot} m$ si $j \uparrow m$ et $j \not\downarrow m$.

Si l'on note J_L l'ensemble des sup-irréductibles du treillis L et M_L l'ensemble de ses inf-irréductibles, la *A-table* de L est le tuple $A_L = (J_L, M_L, \updownarrow, \downarrow_{\cdot}, \uparrow_{\cdot}, \leq)$ (où $\leq$ est la relation d'ordre définissant L). Par définition des relations-flèche, il est clair que les relations $\updownarrow$, $\downarrow_{\cdot}$ et $\uparrow_{\cdot}$ et $\leq$ ne s'intersectent pas. On représente donc en général la A-table de L par une table à double entrée, dont les lignes sont indicées par les sup-irréductibles et les colonnes par les inf-irréductibles de L. Dans cette représentation de la A-table, une coordonnée $(j,m) \in (J \times M)$ contient une croix $\times$ si $j \leq m$, une flèche simple $\uparrow$, $\downarrow$, ou double $\updownarrow$ suivant le cas et le symbole $\circ$ si le couple (j,m) ne vérifie aucune de ces précédentes conditions. Un *tableau* T du treillis L est un triplet $T = (A_L, \mathcal{L}_{J_L}, \mathcal{L}_{M_L})$ où $\mathcal{L}_{J_L}$ et $\mathcal{L}_{M_L}$ sont deux ordres linéaires définis respectivement sur les ensembles J_L et M_L et qui déterminent — de haut en bas et de gauche à droite — les deux ordres des "lignes" et des "colonnes" du tableau T. La A-table de L peut donc être décrite par $(|J_L|! \times |M_L|!)$ tableaux distincts, correspondant à autant de configurations relatives possibles des symboles $\times$, $\uparrow$, $\downarrow$, $\updownarrow$ et $\circ$. Un résultat (que nous n'exposons pas dans ce résumé) caractérise l'appartenance d'un treillis à la classe $1[\mathcal{C}]$ par l'existence pour ce treillis d'au moins un $\mathcal{C}$-*tableau* (tableau vérifiant certaines propriétés caractéristiques). Le théorème 3 est une expression équivalente de ce résultat qui nous permet de définir un algorithme de reconnaissance des treillis de $1[\mathcal{C}]$. Nous avons besoin des définitions suivantes :

Soit $G_L = (J_L, M_L, \updownarrow)$ l'ensemble ordonné biparti associé au treillis L et notons $\{G_i = (J_i \cup M_i) : \ i \leq p\}$ l'ensemble de ses composantes connexes.

Soit alors la condition $P(i)$ définie pour tout $i \leq p$ par :

Pour tout $(j,m) \in (J_i \times M_i)$, *on a soit* $j \updownarrow m$ *soit* $j \circ m$ P(i)

Et soit la relation binaire φ définie sur l'ensemble des $(J_i)_{i \leq p}$ par :

$$J_i \varphi J_{i'} \text{ s'il existe un triplet } (j, j', m) \in (J_i \times J_{i'} \times M_L) \text{ tel que}$$
$$(j \updownarrow m \text{ et } j' \uparrow m) \qquad \text{ou} \qquad (j \downarrow m \text{ et } j' \updownarrow m)$$

Nous avons établi le résultat suivant :

Théorème 3 *Soit L un treillis. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $L \in 1[\mathcal{C}]$.

2. La relation φ est acyclique et la condition $P(i)$ est vérifiée pour tout $i \leq p$.

L'algorithme de reconnaissance que nous proposons d'un treillis L de $1[\mathcal{C}]$ dérive directement de ce dernier théorème. Cet algorithme prend en entrée la A-table d'un treillis L et retourne un $\mathcal{C}$-tableau de ce treillis si celui-ci appartient à $1[\mathcal{C}]$. Nous donnons tout d'abord la description de l'algorithme :

1. Calculer les p composantes connexes $(J_i \cup M_i)$ du graphe G_L associé à L, en $O(|J_L| \times |M_L|)$.
2. Tester les p conditions $P(i)$. Étant donné que ce test coûte $O(|J_i| \times |M_i|)$ pour chaque $i \leq p$, tester les p conditions $P(i)$ s'effectue en $O(|J_L| \times |M_L|)$. Si l'un des tests échoue, stopper.
3. Calculer la relation binaire φ sur $(J_i)_{i \leq p}$ en $O(|J_L| \times |M_L|)$ (en effet, pour tout couple $(j,m) \in (J_L \times M_L)$, on a uniquement besoin de considérer l'ensemble J_i tel que $j \in J_i$ et l'ensemble $M_{i'}$ tel que $m \in M_{i'}$ afin de savoir si l'on a $J_i \varphi J_{i'}$ ou $J_{i'} \varphi J_i$ ou aucun des deux).
4. Tester si φ est acyclique ou non en $O(|J_L| \times |M_L|)$. Si φ possède un circuit, stopper.
5. Calculer un tri topologique de φ et choisir une permutation des éléments à l'intérieur de chaque J_i et de chaque M_i afin d'obtenir un $\mathcal{C}$-tableau de L.

Algorithm 1 Algorithme de reconnaissance d'un treillis de la classe $1[\mathcal{C}]$

Input: La A-table d'un treillis L.
Output: Un $\mathcal{C}$-tableau T de L si $L \in 1[\mathcal{C}]$.
begin
1: Soit $G_L = (J_L, M_L, \updownarrow)$;
Calculer les p composantes connexes $(J_i \cup M_i)$ de G_L;
2: foreach $i \leq p$ **do**
  foreach $(j, m) \in (J_i \times M_i)$ **do**
    if $j \not\updownarrow m$ *et* $j \not\wp m$ **then exit**;
3: foreach $j, m \in (J_L \times M_L)$ **do**
  let $i \leq p : j \in J_i$;
  let $i' \leq p : m \in M_{i'}$;
  if $j \uparrow_{.} m$ **then** $J_{i'} \varphi J_i$;
  if $j \downarrow_{.} m$ **then** $J_i \varphi J_{i'}$;
4: if φ *a un circuit* **then exit**;
5: foreach $i \leq p$ **do**
  choisir arbitrairement un ordre total $<_{J_L}$ sur les éléments de J_i;
  choisir arbitrairement un ordre total $<_{M_L}$ sur les éléments de M_i;
étendre $<_{J_L}$ à J_L en choisissant comme ordre total sur $(J_i)_{i \leq p}$ un tri topologique de φ;
étendre $<_{M_L}$ à M_L en choisissant comme ordre total sur $(M_i)_{i \leq p}$ l'ordre naturellement associé;
Retourner le $\mathcal{C}$-tableau $T = (A_L, <_{J_L}, <_{M_L})$ défini par la A-table de L, et les ordres totaux $<_{J_L}$ sur J_L et $<_{M_L}$ sur M_L;
end

NB : Les travaux dont sont issus ces résultats sont regroupés dans Bertet et Caspard [1]. L'algorithme de reconnaissance utilisant la A-table du treillis en entrée, nous avons également proposé dans ce papier un algorithme de calcul de la A-table d'un treillis.

References

[1] K. Bertet et N. Caspard, Doubling convex sets in lattices : characterizations and recognition algorithms, soumis (1998).

[2] A. Day, A simple solution of the word problem for lattices, *Canad. Math. Bull.*, **13** (1970), 253-254.

[3] A. Day, Congruence normality : The characterization of the doubling class of convex sets, *Algebra Universalis* **31** (1994), 397-406.

[4] B. Ganter, Lattice Theory and Formal Concept Analysis, dans : Lattice Theory and its Applications, K.A. Baker, R.Wille (eds.), Heldermann Verlag 1995, 79-90.

[5] W. Geyer, The generalized doubling construction and formal concept analysis, *Algebra Universalis* **32** (1994), 341-367.

[6] R. Wille, Subdirect decomposition of concept lattices, *Algebra Universalis* **17** (1983), 275-287.