Construction de $SPM(n)$ et $SPM(\infty)$

Matthieu Latapy, Roberto Mantaci,
Michel Morvan and Ha Duong Phan

SPM (Sand Pile Model) est un modèle simple de système dynamique discret. Il est constitué d'une suite infinie de colonnes, indexées par les entiers positifs, chacune contenant un certain nombre de grains. A tout instant, seulement un nombre fini de colonnes sont non vides, donc l'état du système est codé par le k-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Si la suite a_i est non-croissante, ce k-uplet est une *partition de* n où $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$. L'état initial du système est (n), c'est à dire l'état où tous les grains sont dans la première colonne. La règle d'évolution est la suivante : un grain peut tomber d'une colonne à sa voisine de droite si la différence de leurs hauteurs est au moins 2 (voir Figure 1). L'ensemble des configurations accessibles est noté $SPM(n)$.

Ce modèle est utilisé en physique pour représenter certains phénomènes apparaissant dans les milieux granulaires [Dur97]. Les éléments de $SPM(n)$ ont été caractérisés [GMP98b] ; ce sont des partitions particulières de n, dont le dénombrement est un problème combinatoire ouvert. Par ailleurs, on peut ajouter la règle de glissement suivante : un grain peut passer de la colonne i à la colonne j si $a_i = p+1$, $a_j = p-1$ et $a_k = p$ pour $i < k < j$ et pour un certain entier p (voir Figure 1). On obtient alors le modèle $L_B(n)$ introduit par Brylawski en 1973 [Bry73]. $L_B(n)$ est exactement l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n, dont l'étude est un problème fondamental en combinatoire.

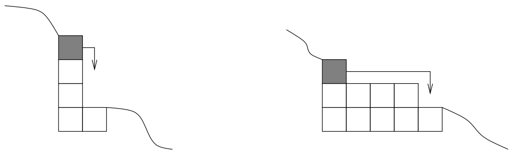

FIG. 1: Illustrations de la règle SPM, à gauche, et du glissement, à droite.

L'étude de ces objets connaît un nouvel essor grâce à l'utilisation de la théorie des ordres et des treillis [Pha99, GMP98a, GMP98b, GMP98c, GK93]. Un *ordre* est un ensemble muni d'une relation $\leq$ réflexive, antisymétrique et transitive. Un *treillis* est un ordre tel que tout couple d'élements x et y a un plus petit majorant et un plus grand minorant, notés respectivement $x \vee y$ et $x \wedge y$. Pour plus de détails, on peut se reporter par exemple à [DP90]. Il apparaît [GK93, Bry73] que $SPM(n)$ et $L_B(n)$ sont des treillis, une propriété qui semble étonnemment peu sensible à des variations sur les règles [Pha99, GMP98c].

L'objet de ce travail est l'étude de la structure de $SPM(n)$. Nous commençons par montrer que $SPM(n+1)$ peut être construit à partir de $SPM(n)$ par duplication de certaines parties, que nous caractérisons. On obtient ainsi un algorithme récursif pour construire $SPM(n)$, dont on déduit une récurrence pour le calcul de $|SPM(n)|$.

Nous définissons ensuite $SPM(\infty)$ (voir Figure 2), qui peut être vu de façon indépendante comme une extension infinie de SPM (dans laquelle on commence avec un nombre infini de grains), ou comme un codage de la construction incrémentale établie précédemment. Nous montrons une forte auto-similarité de cet objet, et donnons un algorithme efficace pour en construire certaines parties. Nous en déduisons un codage de $SPM(\infty)$ par un arbre, $SPT(\infty)$, et montrons que cet arbre peut aussi être simplement décrit de façon récursive. Ceci donne lieu à l'obtention d'une nouvelle récurrence pour $|SPM(n)|$.

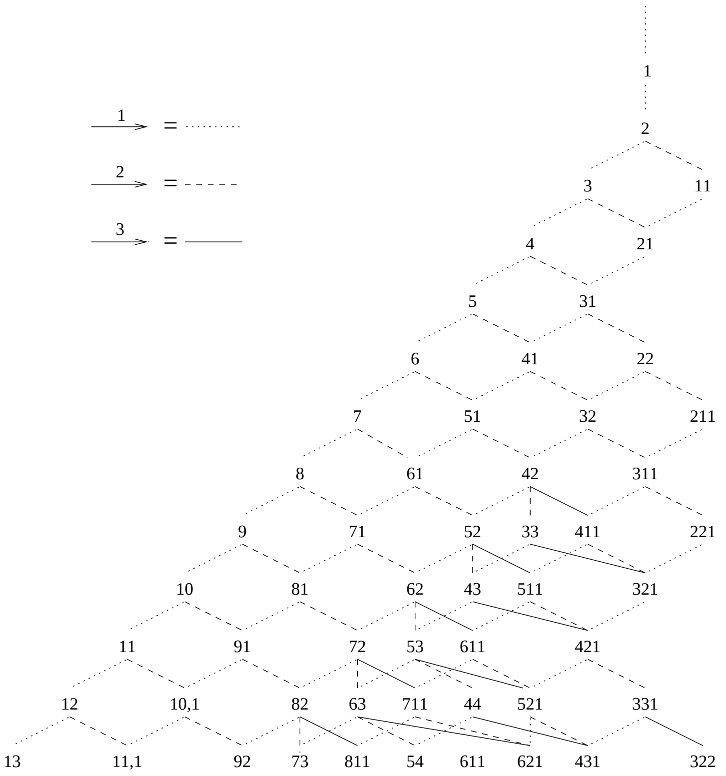

FIG. 2: Diagramme de Hasse d'un début de $SPM(\infty)$. La première colonne, toujours égale à ∞, n'est pas représentée.

En résumé, notre travail explique certains éléments de la structure des treillis $SPM(n)$. Il est envisageable d'étendre ces méthodes à $L_B(n)$, dans l'espoir de déterminer des propriétés nouvelles de l'ensemble des partitions d'un entier n, ainsi que de nouvelles identités ou des preuves originales d'identités connues.

Références

[Bry73] T. Brylawski. The lattice of integer partitions. *Discrete Mathematics*, 6 :210–219, 1973.

[DP90] B.A. Davey and H.A. Priestley. *Introduction to Lattices and Orders.* Cambridge university press, 1990.

[Dur97] Jacques Duran. *Sables, poudres et grains.* Eyrolles sciences, 1997. Préface de P.G. de Gennes.

[GK93] E. Goles and M.A. Kiwi. Games on line graphs and sand piles. *Theoretical Computer Science*, 115 :321–349, 1993.

[GMP98a] E. Goles, M.Morvan, and H.D. Phan. Lattice structure and convergence of a game of cards. 1998. submitted.

[GMP98b] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. Sand piles and order structure of integer partitions. 1998. submitted.

[GMP98c] E. Goles, M. Morvan, and H.D. Phan. The structure of chip firing games and related models. 1998. submitted.

[Pha99] Ha Duong Thi Phan. *Structures ordonnées et dynamiques de piles de sable.* PhD thesis, Université Paris 7 - LIAFA, 1999.