# Une approche algébrique de CSP

Florent Madelaine

27 janvier 1999

**Mots-clés :** Problèmes de satisfaction de contraintes, complexité, NP-complétude, clôture, clones.

## Introduction

Le Problème de satisfaction de contraintes (CSP) est NP-complet dans le cas général. Caractériser des restrictions permettant d'obtenir des problèmes qu'on puisse résoudre efficacement est intéressante du point de vue pratique, car CSP permet de modéliser facilement des problèmes de *scheduling* ou des problèmes lies à l'utilisation de téléphones mobiles, *frequency assignment problem* [All-D 97]. Une des approches utilisée pour restreindre le problème général est celle qui consiste à limiter les contraintes autorisées à un ensemble particulier. Dans ce cadre on recherche à caractériser des classes de contraintes "efficaces" [1], c'est-à-dire pour lesquelles le sous-problème de CSP associé est polynômial. Afin de trouver de telles classes, on utilise la méthode algébrique liée à des objets appelés *clones* [2] et qui consiste à caractériser une contrainte par l'intermédiaire de l'ensemble des opérations qui la *préserve*. Cette méthode a permis par exemple a Schaeffer dans [Sch 78] d'obtenir une caractérisation complète des sous-problèmes polynômiaux de SAT (qui correspond au sous-problème de CSP dans lequel le domaine est booléen).

## Définitions

le Problème de Satisfaction de Contraintes (CSP);

- INSTANCE : Un triplet $\mathcal{P} = \langle V, D, C \rangle$, où $V$ est un ensemble fini de **variables**, $D$ un ensemble fini de **valeurs** et $C$ un ensemble fini de **contraintes**. Une contrainte d'arité $m$, $m > 0$, est une paire $\langle \varrho, s \rangle$, où $\varrho \subseteq D^m$ et $s \in V^m$

- QUESTION : $\mathcal{P}$ admet-il une **solution** ?

Solution d'un CSP;

1. en anglais *tractable classes*.
2. L'étude de tels objets a été initiée par E. Post dans le cas booléen [Pos 41].

- $h : V \to D$ **satisfait** la contrainte $\varrho(s)$ si $\varrho(h(s[1]), h(s[2]), \ldots, h(s[m]))$ est vraie,
  *i.e.* $h(s) := \langle h(s[1]), h(s[2]), \ldots, h(s[m]) \rangle \in \varrho$.
- $h$ satisfaisant **toutes** les contraintes est appelé **solution**

Le problème de satisfaction de contraintes étant **NP-complet**, on le restreint de la façon suivante : CSP($\Gamma$) désigne le problème de décision ayant pour instance des contraintes définissables par des relations de $\Gamma$. Notre but principal en plus de déterminer des classes de relations efficaces est de déterminer celles qui sont **P-maximales**[3]?
*Exemple :* Soit $\nu_{0,1}$ la relation ternaire sur $\mathcal{D} = \{0,1\}$ définie comme suit :

$$\nu_{0,1} := \{t \in \mathcal{D}^3 \mid t \text{ a au moins deux valeurs distinctes } \}$$

Le problème CSP($\{\nu_{0,1}\}$) correspond au problème NP-complet (cf. [Gar-J 79]) NOT-ALL-EQUAL-SATISFIABILITY.

## Notions de bases en théorie des clones

Pour plus d'informations sur la théorie des clones, voir entre autres [Pos 41, Bod-K-K-R 69, Kal-P 79]. Soit $D$ un ensemble **fini**. Un ensemble $F$ d'opérations sur $D$ est appelé **clone** s'il est stable par **composition** et contient toutes les **projections**. **L'ensembles des relations clos** pour les éléments de $F$ est noté $\mathbf{Inv}_{\mathcal{D}}(F)$ (en appliquant chaque fonction en chaque coordonnée d'une relation). De façon similaire, on définit $\mathbf{Pol}_{\mathcal{D}}(\Gamma)$, pour un ensemble de relations $\Gamma$, comme **l'ensemble des opérations** respectant les relations de $\Gamma$. Pour un ensemble de relations quelconques $\Gamma$, $\mathbf{Inv}_{\mathcal{D}}(\mathbf{Pol}_{\mathcal{D}}(\Gamma))$ est appelé **co-clone**. L'ensemble des clones, resp. co-clones, forme un treillis pour l'inclusion. Les opérateurs $\mathbf{Pol}_{\mathcal{D}}$ et $\mathbf{Inv}_{\mathcal{D}}$ établissent une **correspondance de Galois** entre ces deux treillis. Il y a un nombre fini de (co-)clones minimaux et de (co-)clones maximaux dans ces deux treillis (*i.e.* voisins immédiats du plus petit, resp. plus grand, (co-)clone). Du fait de la correspondance de Galois entre le treillis des clones et celui des co-clones, un **co-clone maximal** $\Gamma$ est caractérisé par $\Gamma = \mathbf{Inv}_{\mathcal{D}}(F)$, ou $F$ est un clone minimal.

## Le théorème de Jeavons

Ce résultat établit le lien entre l'étude des sous-problèmes de CSP et la théorie d'algèbre universelle sur les clones, à savoir que la complexité de CSP($\Gamma$) est déterminée par $\mathbf{Pol}_{\mathcal{D}}(\Gamma)$.

**Théorème ([Jea 95]).** *Soient $\Gamma$ et $\Gamma_0$ deux ensembles de relations sur un ensemble fini $D$, tel que $\Gamma_0$ est **fini**. Si $\mathbf{Pol}_{\mathcal{D}}(\Gamma) \leq \mathbf{Pol}_{\mathcal{D}}(\Gamma_0)$, alors CSP($\Gamma_0$) est réductible à CSP($\Gamma$) en temps polynômial.*

3. c'est-à-dire un ensemble de relations tel que tout ensemble plus grand induise un sous-problème de CSP non polynômial

Remarque : l'hypothèse de finitude pour $\Gamma_0$ est importante, puisque la preuve se fait par induction sur la taille $n$ de la liste $\Sigma$ d'opérations à appliquer aux éléments de $\Gamma$ pour obtenir $\Gamma_0$. Soit $\Sigma'$ la liste des $n-1$ premiers éléments de $\Sigma$ et $\Gamma'$ l'ensemble obtenu de $\Gamma$ en appliquant les opérateurs de $\Sigma'$. On exhibe alors une réduction polynômiale de CSP($\Gamma_0$) à CSP($\Gamma'$). Tout fonctionne bien par transitivité des réductions et parce qu'**il y a un nombre fini d'étapes**.

## Utilisation de ce résultat pour caractériser des classes P-maximales

Utilisant ce résultat, on peut montrer facilement que tout ensemble efficace est inclus dans un co-clone maximal. En effet, si ce n'est pas le cas, on peut établir une réduction de NOT-ALL-EQUAL-SATISFIABILITY au sous-problème de CSP. Ainsi si un co-clone $\Gamma$ est maximal et que $\Gamma$ est efficace alors $\Gamma$ est P-maximal.
Dans le cas booléen (*i.e.* problème SAT), Schaeffer obtient son résultat de dichotomie quant à la complexité des sous-problèmes de SAT en les classant soit dans P soit dans NP du fait de la structure plus simple du treillis des clones dans le cas booléen et notamment parce que un seul co-clone maximal n'est pas dans P. On ne sait malheureusement pas caractériser complètement les co-clones maximaux. On n'a qu'une condition nécessaire (Théorème de Rosenberg), permettant de caractériser des classes de relations **susceptibles** d'être P-maximales. Ce théorème est résumé dans le tableau ci-dessous.

### Types des clones minimaux (I.G. Rosenberg dans [Ros 86])

| type | $\mathbf{Pol}_{\mathcal{D}}(\mathbf{Inv}_{\mathcal{D}}(f))$ avec $f$ non triviale et |
|---|---|
| (1) | $f$ unaire (a) $f$ constante<br>(b) $f$ non constante ("essentiellement unaire") |
| (2) | $f$ binaire, idempotente *i.e.* $f(x,x)=x$ |
| (3) | $f$ opération majoritaire ternaire<br>*i.e.* $f(x,x,y)=f(x,y,x)=f(y,x,x)=x$ |
| (4) | $f$ opération affine *i.e.* $f(x,y,z)=x-y+z$ pour un groupe Abèlien $\langle D,+\rangle$ |
| (5) | $f$ semiprojection d'arité $n$ *i.e.* $n \geq 3 \exists k : \forall 1 \leq i < j \leq n$,<br>$f(x_1,\ldots,\underbrace{x_i,\ldots,x_j}_{x_i=x_j},\ldots,x_n)=x_k$ |

### Complexité des co-clones "maximaux"

Pour chaque type d'opération $f$ que nous donne le théorème de Rosenberg, on essaye de montrer que $\mathbf{Inv}_{\mathcal{D}}(f)$ est efficace, ou non. Pour ce faire, soit on utilise les propriétées de $f$ pour écrire en algorithme fonctionnant en temps polynômial, soit on montre que certaines relations appartiennent à $\mathbf{Inv}_{\mathcal{D}}(f)$.

Dans ce dernier cas, ces relations permettent de réduire des problèmes NP-complets bien connus à notre sous-problème de CSP.

| type | Si $\mathbf{Pol}_\mathcal{D}(\Gamma)$ contient $f$ et que | alors CSP($\Gamma$) est | P-maximal |
|---|---|---|---|
| (1) | (1a) $f$ constante | P | ✓ |
| | (1b) essentiellement unaires | NP-complet | |
| (2) | (2a) $f$ ACI | P | ✓ |
| | (2b) $f$ "rectangular band" | NP-complet | |
| | (2c) $f$ "$p$-cyclic binar" | NP-complet | |
| | (2d) $f$ sQuaG | P | ? |
| | autres cas | ? | |
| (3) | $f$ opération majoritaire | P | parfois |
| (4) | $f$ opération affine | P | parfois |
| (5) | $f$ semiprojection | NP-complet | |

## Perspectives, problèmes ouverts

L'approche algébrique de l'étude de CSP semble être une bonne méthode d'autant plus qu'elle a permit d'expliciter des résultats déjà obtenus de manière plus simple voir de les généraliser (voir par exemple le rapport entre "i-consistency" d'un CSP et "near-unanimity function" dans [Coh-C-J 98] ou bien encore la généralisation de la classe efficace des "row-convex constraints" dans [Coh-C-J 94]). La méthode a cependant ces limites, par exemple dans notre recherche des classes P-maximales on se heurte aux mêmes problèmes que les algébristes qui cherchent à compléter la description du treillis des clones. En effet, dans le cas d'un domaine non-booléen de cardinal supérieur à 3, on n'a que des informations sur les clones maximaux et minimaux, le reste étant assez méconnu (cette difficulté vient du fait que le nombre de clones devient indénombrable et que le nombre de clones minimaux et maximaux est exponentiel en la taille du domaine). Pour finir, voici une liste de quelques problèmes ouverts intéressants :

- Peut-on étendre le résultat de Jeavons à des ensembles infinis de relations, *i.e.* se cantonner aux co-clones dans notre approche restrictive du problème général de satisfaction de contraintes ?
- Finir de classifier si possible les co-clones maximaux, en particulier dans le cas de polymorphes binaire idempotent.
- Existe-t-il des co-clones qui ne soient pas maximaux mais tout de même P-maximaux ?
- Trouver d'autres relations permettant de montrer la NP-complétude (on utilise jusqu'à présent $\neq$ (3-Col) et $\nu$ (Not-All-Equal-Sat).

## Références


[All-D 97] Allen, S. Dunkin, N. Frequency assignment problems: Representations and solutions. Technical report, Department of Computer Science, Royal Holloway, University of London, Egham, Surrey, UK, 1997.

[Bod-K-K-R 69] Kotov, V.N. Romov, B.A. Bodnarčuk, V.G., Kalužnin, L.A. Galois-theorie für postsche Algebren. *Cybernetika*, 3:1–10, 1969.

[Coh-C-J 94] Cooper, M. Jeavons, P., Cohen, D. Characterising tractable constraints. *Artificial Intelligence*, (65), 1994.

[Coh-C-J 98] Cooper, M. Jeavons, P., Cohen, D. Constraint, consistency, and closure. To Appear in: Artificial Intelligence (*March 1998*).

[Gar-J 79] Johnson, D.S. Garey, M.R. *Computers and intractability: a guide to NP-completeness.* Freeman, San Francisco, California, 1979.

[Jea 95] Jeavons, P. On the algebraic structure of combinatorial problems. Technical report, Computer Science Department, Royal Holloway, University of London, Egham, Surrey, UK, 1995. to appear in Theoritical Computer Science.

[Kal-P 79] Kalužnin, L.A. Pöschel, R. *Funktionen- und relationen-Algebren.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.

[Pos 41] Post, E.L. The two-valued iterative systems of mathematical logic. In *Annals of Math. studies*, volume 5. Princeton, 1941.

[Ros 86] Rosenberg, I.G. Minimal clones i: the five types. In *Lectures in Universal Algebra (Proc. conf. Szeged 1983)*, pages 405–427. Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 43, North-Holland, 1986.

[Sch 78] Schaeffer, T.J. The complexity of satisfiability problems. In *Proc* $10^{th}$ *ACM Symposium on theory of computing (STOC)*, pages 216–226, 1978.