Prédicats morphiques et applications à la décidabilité de théories arithmétiques

Arnaud Maes [1]

Service de Logique Mathématique et Algèbre, Institut de Mathématique et d'Informatique, Bâtiment "Le Pentagone", Avenue du Champ de Mars 6, Université de Mons-Hainaut, B-7000 Mons, Belgium.

Résumé

Cet exposé présente quelques uns des principaux résultats développés dans ma thèse de doctorat [3]. Celle-ci est consacrée à des questions de décidabilité de théories arithmétiques. Plus précisément, il y est étudié la question de la décidabilité des théories du premier ordre des expansions de la structure $\langle \mathbb{N}, S, <, 0 \rangle$ par des prédicats morphiques. Le symbole S désigne ici la fonction successeur $x \mapsto x + 1$.

Etant donné un alphabet Σ, l'ensemble Σ^* des mots finis sur Σ forme un monoïde lorsqu'il est muni de la loi de concaténation. Un *mot morphique* est un mot infini obtenu comme point fixe d'un (endo-)morphisme sur ce monoïde. Un prédicat unaire sur $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire, un sous-ensemble de $\mathbb{N}$) est dit *morphique* si son mot caractéristique (sur l'alphabet $\{0, 1\}$) peut être obtenu comme *projection* d'un mot morphique sur un alphabet Σ par une application $\Sigma \to \{0, 1\}$.

Ma thèse [3] décrit plusieurs méthodes permettant de conclure à la décidabilité de $\langle \mathbb{N}, S, <, P, 0 \rangle$ lorsque P est un prédicat morphique.

La première méthode consiste en un travail sur les morphismes eux-mêmes, par l'intermédiaire d'une généralisation de ces morphismes à plusieurs dimensions. J'y introduis une notion de symétrie qui exprime que la croissance du morphisme est identique dans toutes les directions. Je montre que, lorsque le prédicat morphique n-aire P satisfait à cette condition de symétrie, alors la théorie de $\langle \mathbb{N}, S, <, P, 0 \rangle$ est décidable. Ceci est toujours le cas pour les prédicats morphiques unaires.

[1] Aspirant du FNRS, `maesa@sun1.umh.ac.be`

Les arguments utilisés dans la preuve de ce résultat sont semblables à ceux utilisés en théorie des automates (voir par exemple [1]). Il est en fait possible de montrer l'équivalence des notions de définissabilité par morphismes et par automates. Cependant, bien qu'un *système de numération* soit généralement choisi préalablement à l'utilisation d'automates, de récents travaux se concentrent sur la notion d'automate indépendamment de celle de système de numération. C'est exactement cette approche qui est privilégiée par l'utilisation de morphismes.

La deuxième méthode consiste en un algorithme permettant de déterminer si un mot morphique donné satisfait à la propriété de *presque-périodicité*, une notion de régularité introduite par Jacobs [2]. Si tel est le cas, par l'intermédiaire d'un résultat de Semenov [4], ceci entraîne la décidabilité de la théorie de $\langle \mathbb{N}, S, <, P, 0 \rangle$ par élimination des quantificateurs.

References

[1] V. Bruyère, G. Hansel, Bertrand numeration systems and recognizability, *Theoretical Computer Science*, **181** (1997), 17–43.

[2] K. Jacobs, Turing-Maschinen und zufällige 0-1-Folgen, *Selecta Math.*, Vol. II (1970), 141–167.

[3] A. Maes, Morphic predicates and applications to the decidability of arithmetic theories, Doctoral dissertation, Service de Logique Mathématique et Algèbre, Université de Mons-Hainaut (1999).

[4] A. L. Semenov, On certain extensions of the arithmetic of addition of natural numbers, *Math USSR Izv.*, **43** (1979), 1175–1195, [English transl. in *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **15** (1980), 401–418].