Exclusion généralisée

Aude Maignan
Université de Limoges
maignan@unilim.fr

La méthode d'exclusion développée par J.P. Dedieu et J.C. Yakoubsohn est une méthode semi-numérique qui localise l'ensemble des zéros réels de systèmes $P(x) = 0$ de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ dans un hyper-cube $Y \in \mathbb{R}^n$. Elle est basée sur la création d'un polynôme M de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

Si M est positive dans un hyper-cube ξ alors $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans ξ.

La méthode d'exclusion est généralement couplée à une méthode de bissection de telle sorte que si M est négative dans ξ, alors ξ est découpé en 2^n hyper-cubes. Ce découpage s'arrête lorsque les hyper-cubes ont une taille inférieure à la précision souhaitée.

La méthode d'exclusion généralisée décrite ici en est une extension. Elle permet, dans un premier temps, de localiser sur un intervalle borné $[a, b]$ l'ensemble des zéros réels de fonctions du type :

$$h(y) = P(y, f_1(y), f_2(y), \ldots, f_{n-1}(y)).$$

où P est un polynôme à n variables et où les fonctions f_i sont des fonctions "simples" c'est-à-dire qu'elles sont de la forme $\ln(g(y))$, $\exp(g(y))$, $\sin(g(y))$ ou $\cos(g(y))$ où $g(y)$ est une fonction simple ou un polynôme. De plus, le nombre de compositions doit être fini.

L'idée est de se placer dans $\mathbb{R}^n$ et de considérer le problème équivalent suivant : $x_1 \in [a, b]$ et

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} P(x) & = & 0 \\ x_{i+1} & = & f_i(x_1) \quad i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \end{array} \right.$$

Nous souhaitons donc à présent localiser les points d'intersections entre $P(x) = 0$ et

$$(\mathcal{S}') \left\{ \begin{array}{rcl} x_{i+1} & = & f_i(x_1) \\ i & \in & \{1, 2, \ldots, n-1\} \end{array} \right.$$

Le système $(\mathcal{S}')$ a pour solution une courbe $\mathcal{C}$ définie en tout point de $[a, b]$. Sa localisation serait côuteuse mais la détermination, au dessus d'un intervalle contenu dans $[a, b]$, du plus petit pavé contenant $\mathcal{C}$ est simple à obtenir. Ce pavé est appelé **pavé d'étude**.

En appliquant la formule de Taylor et l'inégalité triangulaire à P nous obtenons un polynôme d'exclusion M_g de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ lié à P vérifiant le critère :

$$\text{Si } M_g \text{ est positive dans le pavé d'étude } \mathcal{B} \text{ de base } [r, s] \text{ alors}$$
$$h(y) = 0 \text{ n'a pas de solution sur } [r, s].$$

Le pavé $\mathcal{B}$ ne dépendant que de r, s et des fonctions simples, en remplaçant les variables x_i par les fonctions simples d'origine nous obtenons une fonction d'exclusion de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi la méthode de bissection liée à cette fonction d'exclusion est une bissection sur $\mathbb{R}$.

Cette méthode peut être étendue à des systèmes de fonctions du même type si bien qu'elle est capable de localiser tous les zéros réels du système

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\,\sin(x)y^2 + 2\,\cos^2(x)\sin(y)y - 2\,x + 3 - 4\,\cos^3(y) = 0 \\ 4\,x^2\cos(y) - 7\,\cos(x)\sin^3(x) + 3\,y^2 - 4 + \sin(y)\cos^2(x)x = 0 \end{array} \right.$$

dans le rectangle $[-5, 5] \times [-3, 1]$ avec une précision de 10^{-10} en 26 secondes. Ce résultat a été obtenu avec le logiciel MAPLE sur une machine de type DEC alpha EV56 pws/500 du groupe medicis.