Codes d'Arbres et Automates d'Arbres

Laurent Oget

LIAFA

Nous poursuivons des travaux initiés par maurice Nivat dans un article de 92 (M. Nivat Binary Tree Codes. In: M. Nivat and A. Podelski (Eds), ' Tree automata and languages.' Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1-9, 1992.) visant à étendre aux arbres binaires la theorie des codes sur les mots.

Apres avoir rappelé ce que nous entendons par arbre binaire, à savoir une application $t : D \to A$, d'une partie D close par préfixe de $\{0,1\}^*$ dans un alphabet A nous rappelons la notion de concatenation sur les arbres:

- Si $t_1 : D_1 \to A$ et $t_2 : D_2 \to A$ sont deux arbres $t_1.t_2$ est l'ensemble des arbres $t1 + w.t_2 : D1 \cup w.D2 \to A$, où w est un mot minimal du complémentaire de D_1, induits par les t_1 et t_2 sur respectivement D_1 et D_2.

On étend naturellement cette notion aux ensembles d'arbres, puis on définit inductivement les puissances d'un ensemble d'arbre, dont l'union constitue la forêt engendrée. Un ensemble d'arbre est un code si les arbres de la forêt engendrée ne peuvent être engendrés que d'une façon. On donne un critère pour montrer cette unicité. On munit par ailleurs l'ensemble des arbres d'une structure d'algèbre libre, rejoignant la tradition des automates d'arbres.

Dans un deuxième temps nous rappelons les notions de base sur les automates d'arbre, en les adaptant a notre contexte particulier. Un automate d'arbre est ainsi un quadruplet $M = (Q, Q_I, Q_F, \tau)$ où Q, Q_1 et Q_2 sont respectivement les ensembles d'états, d'́tats initiaux et d'états finaux et τ une partie de $Q \times A \times Q \times Q$. Un arbre est reconnu s'il existe une application de son domaine vers Q qui envoie la racine vers un état initial et les noeuds frontières vers des états finaux, et qui est compatible avec τ, c'est à dire telle que pour tout w $(q(w), t(w), q(w.0), q(w.1))$ appartienne à τ.

On rappelle, encore une fois en les adaptant à notre contexte, les résultats classiques sur les automates d'arbres, en particulier les notions d'automates ascendants déterministes et d'automates minimaux. On définit les automates non-ambigus commes les automates qui reconnaissent les arbres d'une façon unique. On montre que toutes les forêts reconnaissables peuvent être reconnues par des automates non-ambigus. On expose un algorithme qui décide l'ambiguité d'un automate.

On montre que l'on sait construire les automates qui reconnaissent:

- Un arbre donné.
- L'union de deux forêts reconnaissables.
- La forêt engendrée par une forêt reconnaissable

On montre qu'une forêt est un code si et seulement si l'automate qui reconnait la forêt engendrée est non ambigu, ce qui nous donne un algorithme pour décider de la codicité de toute forêt finie et de plus de toute forêt reconnaissable.

Au delà de l'intérêt intrinsèque de cet algorithme qui va au delà de l'algorithme donné par Maurice Nivat, qui est une généralisation de l'algorithme de Sardinas et Paterson, on montre comment on peut utiliser les automates d'arbres commes outils pour traiter des problèmes de combinatoire sur les arbres, ce qui devrait permettre de généraliser aux arbres de nombreux résultats de la théorie des codes sur les mots.