Fonctions rationnelles continues sur les mots infinis

Christophe Prieur
LIAFA, Université Paris 7, 2 Pl. Jussieu,
75 251 Paris Cedex 05, France
Christophe.Prieur@liafa.jussieu.fr

6 février 1999

Introduction

À partir de l'étude des ensembles rationnels de mots infinis, initiée par Büchi [Büc62] pour la recherche de théories logiques décidables, et par Müller [Mul63] pour la modélisation de circuits asynchrones ; et de celle des automates finis calculant des relations sur les mots, dont les principaux initiateurs sont Elgot et Mezei [EM65], c'est tout naturellement que Gire [Gir83] introduisit la notion de relations rationnelles sur les mots infinis.

L'ensemble des mots infinis possédant une topologie sympathique (c'est un espace métrique compact), les propriétés topologiques de ces relations sont particulièrement dignes d'intérêt. Les fonctions continues notamment, se sont révélées être très liées aux fonctions séquentielles, ainsi qu'aux fonctions synchrones (*i.e.* réalisées par un automate dont les transitions sont étiquetées par un couple de lettres, et non par un couple lettre/mot comme dans le cas général), ainsi que l'a montré Trahtenbrot [TB73].

Le but de cet exposé est de présenter une caractérisation pour les quatre types de fonctions suivants : continues, uniformément continues, lipschitziennes, et *faiblement* lipschitziennes (*i.e.* lipschitziennes et telles que la distance entre les images de deux éléments quelconques ne puisse être bornée par le produit d'une constante par le carré de la distance entre ces deux éléments.)

Transducteurs infinitaires

La topologie que l'on utilisera sur A^ω, l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet A, est définie au moyen de la distance suivante, entre deux mots s et t :

$$d(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } s = t\,; \\ 2^{-|s \wedge t|} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $s \wedge t$ est le plus long préfixe commun à s et à t. Muni de cette topologie, dont les ouverts sont les ensembles XA^ω, avec $X \subseteq A^\omega$, A^ω est un espace métrique compact.

Étant donnée une relation $R \subseteq A_1^\omega \times A_2^\omega$, la fermeture topologique du graphe de R est l'ensemble des couples (α, β) tels que pour tout entier $n > 0$, il existe un couple $(s,t) \in R$ où le préfixe de longueur n de s (resp. de t) est préfixe de α (resp. β).

Un *transducteur* $\mathcal{T}$ est un automate dont les transitions sont étiquetées par des couples de mots sur $A^* \times B^*$. A et B sont alors appelés respectivement alphabets *d'entrée* et *de sortie* de $\mathcal{T}$. On appellera étiquette *d'entrée* (resp. *de sortie*) d'un chemin ou d'une transition, la projection sur l'alphabet d'entrée (resp. de sortie) de son étiquette.

Le *comportement* infini de $\mathcal{T}$, noté $||\mathcal{T}||$, est la relation sur $A_1^\omega \times A_2^\omega$ des couples dont les deux composantes sont des mots infinis, étiquetant les chemins infinis *réussis* de $\mathcal{T}$, *i.e.* les chemin commençant en q_0 et contenant un nombre infini d'états de F. On appelle $||\mathcal{T}||$ la relation *réalisée* par le transducteur infinitaire $\mathcal{T}$.

Fonctions rationnelles continues

Toutes les caractérisations données ici sont décidables en temps polynômial.

Lemme 1 *Une fonction $f : A^\omega \longrightarrow B^\omega$ est continue si, et seulement si la fermeture $\overline{G_f}$ de son graphe est telle que la relation $\overline{G_f} \cap (dom(f) \times B^\omega)$ est une fonction.*

Lemme 2 *Une fonction $f : A^\omega \longrightarrow B^\omega$ est uniformément continue si, et seulement si la fermture de son graphe est fonctionnelle.*

Exemple 0.1 *La fonction f_1 réalisée par le transducteur de la figure 1 est continue, mais pas uniformément continue (NB : on représente par un double cercle* *les états d'acceptation). En effet, si l'on note* $s_n = a^n b\omega$ *et* $t_n = a^n c^\omega$ *pour un entier* $n > 0$, *on a* $f_1(s) = b^w$ *et* $f_1(t_n) = c^w$, *et par conséquent* $d(s_n, t_n) = 2^{-n}$ *et* $d(f(s_n), f(t_n)) = 1$.

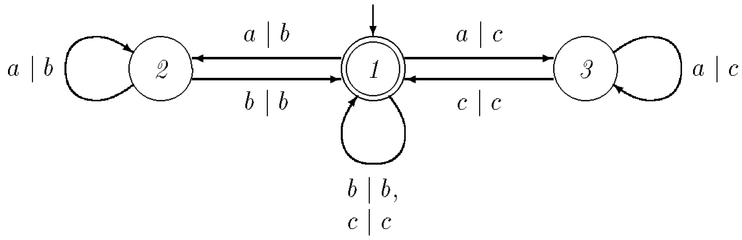

FIG. 1: *Une fonction non continue*

On voit bien que la condition du lemme 2 n'est pas respectée, puisque pour tout entier $n > 0$, *on a* $f_1(a^n b^\omega) = b^\omega$. *Par conséquent, le couple* (a^ω, b^ω), *qui n'est pas reconnu par le transducteur, appartient à la fermeture du graphe de* f_1.

Proposition 3 *Une fonction rationnelle est lipschitzienne si, et seulement si elle est réalisable par un transducteur dont tous les chemins cycliques (i.e. commençant et finissant par le même état) sont étiquetés en sortie par un mot au moins aussi long que l'étiquette d'entrée.*

Exemple 0.2 *La fonction* f_2 *réalisée par le transducteur de la figure 2 est uniformément continue, mais n'est pas lipschitzienne. En effet, pour tout réel* λ, *si l'on note* $s = a^\omega$ *et* $t_n = a^{2n} b^\omega$ *pour un entier* $n > 0$, *alors on a*

$$\frac{d(f_2(s), f_2(t_n))}{d(s, t_n)} = \frac{2^{-n}}{2^{-2n}} = 2^n > \lambda.$$

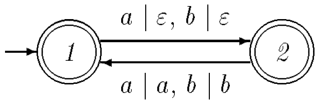

FIG. 2: *Une fonction non lipschitzienne*

Proposition 4 *Une fonction rationnelle* $f : A^\omega \longrightarrow B^\omega$ *est synchrone si, et seulement si elle est faiblement lipschitzienne.*

Références

[Büc62] J.R. Büchi. On a decision method in restricted second order arithmetic. *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, pages 1–11, 1962.

[EM65] C.C. Elgot and J.E. Mezei. On relations defined by finite automata. *IBM J. Res. Develop.*, (9):47–68, 1965.

[Gir83] F. Gire. Une extension aux mots infinis de la notion de transduction rationnelle. In 6^{th} *GI Conf.*, volume 145, pages 123–139. Lect. Notes in Comp. Sci., janvier 1983.

[Mul63] D. Muller. Infinite sequences and finite machines. In IEEE, editor, *Switching Theory and Logical Design, Proc. Fourth Annual Symp. IEEE*, pages 3–16, 1963.

[TB73] B. A. Trahtenbrot and Y. M. Barzdin. *Finite automata.* North-Holland, Amsterdam, 1973.