Homologie des ensembles semi-pfaffiens

Thierry Zell

Les fonctions pfaffiennes ont été introduites par Khovanskii [Kh]. Une famille $(f_1, \ldots, f_\ell)$ de fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbf{R}^k$ constitue une *chaîne pfaffienne* si elles sont solution d'un système différentiel de la forme :

$$\partial f_i / \partial x_j(x) = P_{i,j}(x, f_1(x), \ldots, f_i(x)), \qquad i = 1, \ldots, \quad \ell, j = 1 \ldots k.$$

De telles fonctions vérifient de bonnes propriétés de finitude, similaires aux propriétés des polynômes. Plus précisément, Khovanskii a démontré le théorème suivant, que l'on peut rapprocher du théorème de Bézout :

Théorème — Si $q_1, \ldots, q_k$ sont des fonctions qui peuvent s'exprimer polynomialement en fonction des fonctions d'une chaîne pfaffienne, le système $q_1(x) = \cdots = q_k(x) = 0$ n'a qu'un nombre fini de solutions pour lesquelles le jacobien du système est non nul.

Ce résultat suggère un comportement similaire entre les sous-ensembles de $\mathbf{R}^k$ définis à l'aide de fonctions pfaffiennes et les ensembles semi-algébriques. Des résultats formalisant cette remarque ont été produits par les théoriciens des modèles, menés par Wilkie [W1,W2,KM,S], basé sur des idées de Charbonnel [Ch].

Cependant, le théorème de Khovanskii a une forme quantitative qui permet de borner explicitement le nombre de solutions non dégénérées d'un système en fonction de la complexité des équations de ce système. Des résultats quantitatifs pour la géométrie des ensembles *semi-pfaffiens* – c'est-à-dire définis par des égalités et inégalités pfaffiennes – et *sous-pfaffiens* – c'est-à-dire projections d'ensembles semi-pfaffiens – ont été donnés par Gabrielov et Vorobjov [G1,G2,G3,GV]. Les principaux résultats sont des estimations sur la complexité de stratifications et d'adhérence d'ensembles semi-pfaffiens.

C'est dans la lignée des aspects quantitatifs que se situe mon travail de thèse. Les résultats que je voudrais présenter concernent l'homologie des ensembles semi-pfaffiens. Les méthodes utilisées dans le cas semi-algébrique [B1,B2,BPR1,BPR2,M,T] s'adaptent assez bien à l'étude des composantes connexes, et plus généralement, des nombres de Betti des ensembles semi-pfaffiens. Suivent des énnoncés détaillés :

Soit $(f_1, \ldots f_\ell)$ une chaîne pfaffienne solution d'un système différentiel de degré α, et $q, p_1, \ldots, p_s$ s'exprimant polynomialement dans cette chaîne avec des polynômes de degré au plus β.

La somme des nombres de Betti de l'ensemble $V = \{q = 0\}$ est bornée par $2^{\ell^2} k^\ell O(\alpha + \beta)^{k+\ell}$.

Si on considère un ensemble semi-pfaffien S défini par une disjonction de conditions de signe de la forme $p_{i_1} \geq 0 \wedge \cdots \wedge p_{i_s} \geq 0$, sur l'ensemble V on obtient une borne de $s^{k'} 2^{\ell^2} k^\ell O(\alpha + \beta)^{k+\ell}$ pour la somme des nombres de Betti de S, où k' est la dimension de la variété V.

En général, on peut prouver que le nombre de *cellules* connexes définies par la famille $\{p_1, \dots p_s\}$ sur V est borné par $C_s^{k'} 2^{\ell^2} k^\ell O(\alpha + \beta)^{k+\ell}$.

Mots-clés : Ensembles semi-analytiques, ensembles sous-analytiques, structures o-minimales, théorie de Khovanskii.

Bibliographie

[B1] Basu, S. On bounding the Betti numbers and computing the Euler characteristic of semi-algebraic sets. In *Proc. 28th Annual ACM Symposium on the theory of computing* (1996), pp. 408–417.
[B2] Basu, S. *Algorithms in Semi-algebraic Geometry.* Ph. D. thesis, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1996.
[BPR1] Basu, S., Pollack, R., and Roy, M.-F. A new algorithm to find a point in every cell defined by a family of polynomials. In *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, B. Caviness and J. Johnson, Eds. Springer Verlag, 1997.
[BPR2] Basu, S., Pollack, R., and Roy, M.-F. On the number of cells defined by a family of polynomials on a variety. *Mathematika 43* (1996), 120–126.
[Ch] Charbonnel, Jean-Yves Sur certains sous-ensembles de l'espace euclidien. *Ann. Inst. Fourier 41, No.3, 679-717* (1991).
[G1] Gabrielov, A. Multiplicities of Pfaffian intersections and the Łojasiewicz inequality. *Selecta Mathematica 1* (1995), 113–127.
[G2] Gabrielov, A. On complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions. *Inv. Math. 125* (1996), 1–12.
[G3] Gabrielov, A. Frontier and closure of a semi-Pfaffian set. *Discrete and Comput. Geometry* (1997).
[GV] Gabrielov, A., and Vorobjov, N. Complexity of stratification of semi-Pfaffian sets. *Discrete Comput. Geometry 14* (1995), 71–91.
[KM] Karpinski, M., and Macintyre, A. o-minimal expansions of the real field: a characterization and an application to Pfaffian closure. *Preprint* (1997).
[Kh] Khovanskii, A. G. *Fewnomials*, vol. 88 of *AMS Translations of Mathematical Monographs.* AMS, 1991.
[M] Milnor, J. On the Betti numbers of real varieties. *Proc. AMS 15* (1964), 275–280.
[S] Speissegger, P. The Pfaffian closure on an o-minimal structure *Preprint FI-MT1997-015,* Fields Institute (1997).
[T] Thom, R. Sur l'homologie des variétés algébriques réelles. In *Differential and Combinatorial Topology* (1965), S. Cairns, Ed., Princeton University Press, pp. 255–265.
[W1] Wilkie, A. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function. *J. Am. Math. Soc. 9, No.4, 1051-1094* (1996).
[W2] Wilkie, A. A general theorem of the complement and some new o-minimal structures. *Preprint* (1996).
[Z] Zell T. Betti numbers of semi-Pfaffian sets *à paraître dans les comptes-rendus de MEGA 98*