

Sujet : Colorations d'incidence

=====

Directeurs de thèse : Eric SOPENA

=====

Thème - Equipe : Equipe CombAlgo, thème Graphes et Applications

=====

[éventuellement nom du candidat potentiel] :

=====

Argumentaires pour le sujet : (HDR, thématique à développer, collaborations, etc):

=====

Les travaux concernant les colorations d'incidence ont connu un essor particulier ces dernières années. Cette thématique avait été considérée par M. Hosseini Dolama dans le cadre de sa thèse de doctorat.

Cette thèse devrait nous permettre de relancer les recherches de l'équipe sur cette thématique, source de nombreuses questions ouvertes et porteuse de réelles perspectives.

Descriptif (en quelques lignes):

=====

(voir <http://www.labri.fr/perso/sopena/pmwiki/index.php?n=Proposals.MasterAndPhDProposals>)

Soit  $G$  un graphe non orienté. Une incidence de  $G$  est un couple  $(u,e)$  où  $u$  est un sommet, et  $e$  une arête incidente au sommet  $u$  (une incidence peut ainsi être assimilée à une « demi-arête »). Deux incidences  $(u,e)$  et  $(v,f)$  sont adjacentes si (1)  $u = v$ , ou (2)  $e = f$ , ou (3)  $e = uv$ .

Une  $k$ -coloration d'incidence d'un graphe  $G$  est une fonction associant une couleur prise dans l'ensemble  $\{1,2,\dots,k\}$  à chaque incidence de  $G$  de façon telle que deux incidences adjacentes aient des couleurs distinctes. Le nombre chromatique d'incidence de  $G$ , noté  $\chi_i(G)$ , est alors le plus petit entier  $k$  tel que  $G$  admette une  $k$ -coloration d'incidence (on vérifie aisément, d'après la définition, que  $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$  pour tout graphe  $G$ , où  $\Delta(G)$

désigne le degré maximum de  $G$ ).

Les colorations d'incidence ont été introduites par Brualdi et Massey [BM93] qui ont conjecturé que pour tout graphe  $G$ ,  $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Cette conjecture s'est avérée fautive par la suite mais plusieurs classes de graphes vérifient cette relation. C'est notamment le cas des graphes cubiques [M05] des graphes planaires extérieurs ou, plus généralement, des 2-arbres partiels [HSZ04]. On trouvera dans [Sop] un survol des principaux résultats concernant les colorations d'incidence.

Après une étude bibliographique sur le sujet, on pourra par exemple s'intéresser aux pistes de recherche suivantes :

Conjecture de Brualdi et Massey. Prouver cette conjecture pour d'autres classes de graphes, « simples » ou possédant de « bonnes propriétés ». On pourra alors consulter avec profit l'ouvrage de référence [BSL99]. Le cas des graphes de degré au plus 4 constitue dans ce cadre un challenge particulièrement intéressant.

Produits de graphes. L'étude du nombre chromatique d'incidence des graphes produits [IK00] est une question classique de coloration, apparemment très peu explorée dans le cas des colorations d'incidence.

Jeu de coloration. On considère le jeu à deux joueurs suivant : Alice et Bob jouent à tour de rôle ; chaque joueur doit choisir une incidence non coloriée et lui associer une couleur prise dans un ensemble de  $k$  couleurs fixé au départ ; Alice cherche à produire une  $k$ -coloration d'incidence du graphe alors que Bob cherche à l'en empêcher. On cherche alors à déterminer, pour un graphe  $G$  donné, le plus petit  $k$  pour lequel Alice a une stratégie gagnante, lui permettant de produire une  $k$ -coloration d'incidence de  $G$  quelle que soit la stratégie de Bob. Dans le cas des colorations classiques de graphes non orientés, ce jeu a fait l'objet de nombreuses études (voir [BGKZ07]) ; on trouvera dans [And09] une première étude de ce sujet dans le cadre des colorations d'incidence.

Références bibliographiques

[And09] S.D. Andres. The incidence game chromatic number. *Discrete Appl. Math.* 157(9) (2009), 1980–1987.

- [BGKZ07] T. Bartnicki, J. Grytczuk, H. A. Kierstead and X. Zhu. The map colouring game. *Amer. Math. Monthly* 114 (2007), 793-803.
- [BLS99] A. Brandstädt, V.B. Le, J.P. Spinrad. *Graph Classes: A survey*. Siam monographs on Discrete Math. and Appl. (1999).
- [BM93] R.A. Brualdi, J.Q. Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.* 122 (1993), 51-58.
- [HSZ04] M. Hosseini Dolama, É. Sopena, X. Zhu. Incidence coloring of  $k$ -denegerated graphs. *Discrete Math.* 283 (2004), 121-128.
- [IK00] W. Imrich, S. Klavžar. *Product graphs: structure and recognition*. John Wiley & Sons, New York, USA (2000).
- [M05] M. Maydanskyi. The incidence coloring conjecture for graphs of maximum degree 3. *Discrete Math.* 292 (2005), 131-141.
- [SS08] W.C. Shiu, P.K. Sun. Invalid proofs on incidence coloring. *Discrete Math.* 308 (2008), 6575-6580.
- [Sop] É. Sopena. The Incidence Coloring Page.  
[http://www.labri.fr/perso/sopena/pmwiki/index.php?  
n=TheIncidenceColoringPage.TheIncidenceColoringPage](http://www.labri.fr/perso/sopena/pmwiki/index.php?n=TheIncidenceColoringPage.TheIncidenceColoringPage)

Mots-clés : graphe – coloration – coloration d’incidence – classe de graphes

graph – graph coloring – incidence coloring – graph classes