

# Un problème combinatoire sur les graphes lié aux caractères du groupe symétrique

Valentin Féray

LaBRI, CNRS

Séminaire du LaBRI, 6 mai 2010



- 1 Contexte de mes recherches
  - Représentations du groupe symétrique
  - Lien avec la combinatoire
- 2 Un exemple de problème combinatoire rencontré
  - Itération du poinçonnage
  - Lien avec la première partie

# Permutations

## Definition

Permutation de taille  $n :=$  bijection de  $\{1, \dots, n\} \simeq \{1, \dots, n\}$

Exemple :  $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \cdot$

# Permutations

## Definition

Permutation de taille  $n :=$  bijection de  $\{1, \dots, n\} \simeq \{1, \dots, n\}$

Exemple :  $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{array} \cdot$

On peut les composer  $\Rightarrow$  Elles forment un groupe  $S_n$ .

Exemple simple et assez générique de groupe fini non commutatif.

# Représentations de groupe

Qu'est-ce qu'une représentation ?

Voir les éléments d'un groupe comme des transformations de l'espace

Plus précisément,

élément  $\mapsto$  application linéaire de  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

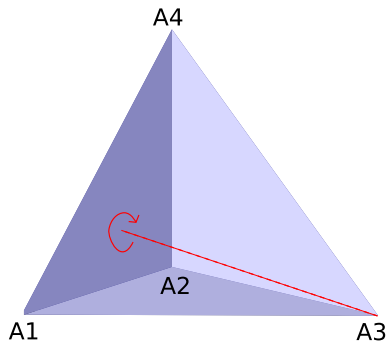
composition des éléments  $\leftrightarrow$  composition des applications linéaires

# Représentations de groupe

Qu'est-ce qu'une représentation ?

Voir les éléments d'un groupe comme des transformations de l'espace

exemple :  $4\ 1\ 3\ 2$  dans la représentation *géométrique*



# Représentations de groupe

Qu'est-ce qu'une représentation ?

Voir les éléments d'un groupe comme des transformations de l'espace

En général, beaucoup plus complexe.

On aimerait classifier toutes les représentations *en toute dimension* (à isomorphisme près).

# Caractères

Une représentation = une matrice  $\rho(g)$  par élément du groupe.

son caractère  $\chi =$

on ne conserve que  $\text{tr}(\rho(g))$ .

$\chi$  est une fonction  $S_n \rightarrow \mathbb{C}$ .



# Caractères

Une représentation = une matrice  $\rho(g)$  par élément du groupe.

son caractère  $\chi =$

on ne conserve que  $\text{tr}(\rho(g))$ .

$\chi$  est une fonction  $S_n \rightarrow \mathbb{C}$ .

## Miracle

Une représentation est déterminée par son caractère.

# Caractères

Une représentation = une matrice  $\rho(g)$  par élément du groupe.

son caractère  $\chi =$

on ne conserve que  $\text{tr}(\rho(g))$ .

$\chi$  est une fonction  $S_n \rightarrow \mathbb{C}$ .

## Miracle

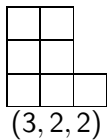
Une représentation est déterminée par son caractère.

$\Rightarrow$  on étudie les caractères

problème **algébrique** au lieu de **géométrique**.

# Objets liés

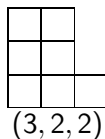
Diagrammes et tableaux de Young :



|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 7 |   |
| 2 | 5 |   |
| 1 | 3 | 6 |

# Objets liés

Diagrammes et tableaux de Young :



|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 7 |   |
| 2 | 5 |   |
| 1 | 3 | 6 |

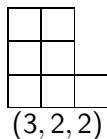
Polynômes à plusieurs variables symétriques :

$$e_2(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_3$$

$$p_i(X_1, \dots, X_k) = X_1^i + \dots + X_k^i$$

# Objets liés

Diagrammes et tableaux de Young :



|   |   |   |
|---|---|---|
| 4 | 7 |   |
| 2 | 5 |   |
| 1 | 3 | 6 |

Polynômes à plusieurs variables symétriques :

$$e_2(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_3$$

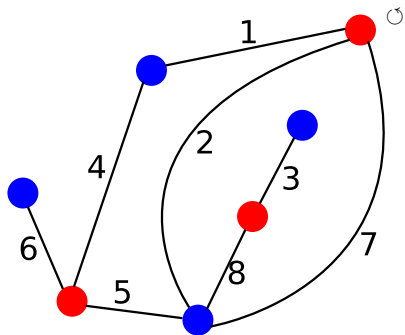
$$p_i(X_1, \dots, X_k) = X_1^i + \dots + X_k^i$$

Graphes...

# Grphe bipartite planeire et permutations

Soit  $G$  un grphe bipartite :

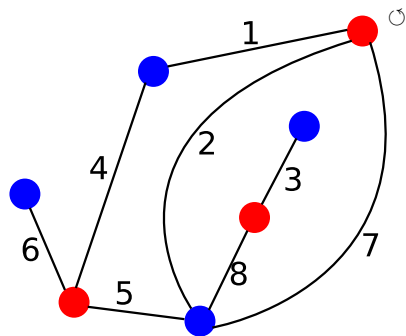
- dessin dans le plan
- dont les arêtes sont numrotées de 1 à  $n$



# Graphe bipartite planaire et permutations

Soit  $G$  un graphe bipartite :

- dessiné dans le plan
- dont les arêtes sont numérotées de 1 à  $n$



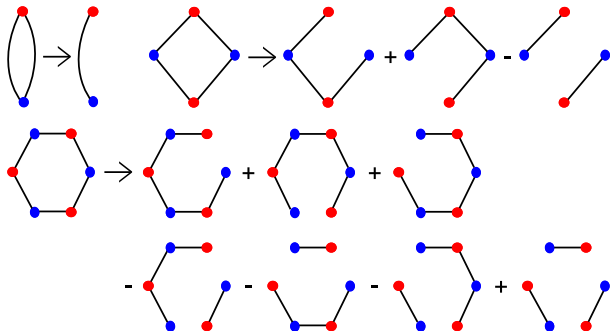
On lui associe deux permutations

$$\sigma_{\bullet} = 2 \ 7 \ 8 \ 6 \ 4 \ 5 \ 1 \ 3$$

$$\sigma_{\circ} = 4 \ 5 \ 3 \ 1 \ 7 \ 6 \ 8 \ 2$$

# Poinçonnage

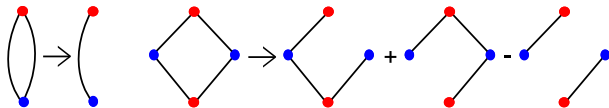
On choisit un cycle dans un graphe bipartite planaire. Considérons l'opération :



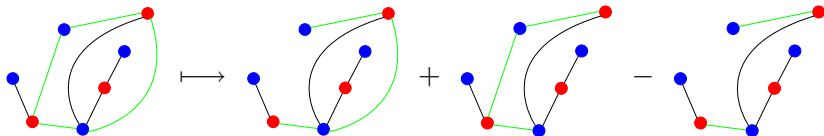


# Poinçonnage

On choisit un cycle dans un graphe bipartite plane. Considérons l'opération :

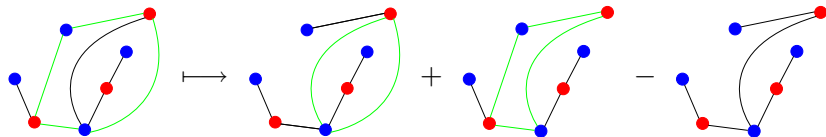


Exemple :



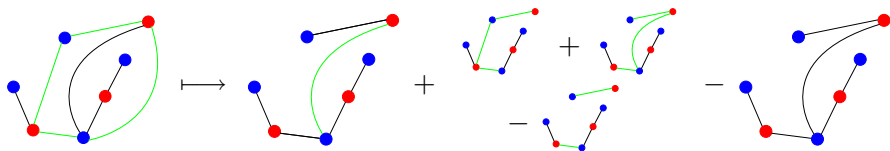
# Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



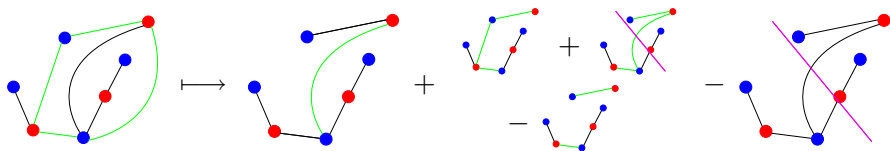
# Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



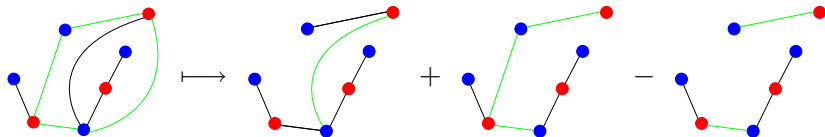
# Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



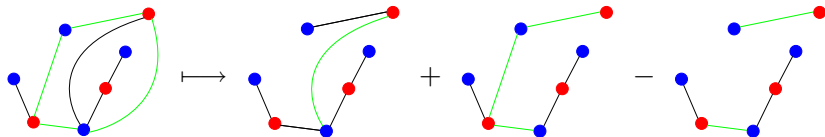
# Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



# Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple

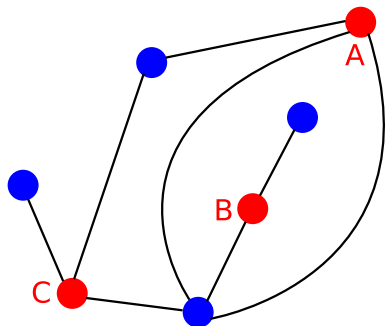


## Propriétés

- Le résultat  $D(G)$  ne dépend pas des cycles choisis.
- Les signes dépendent seulement du nombre de composantes connexes.

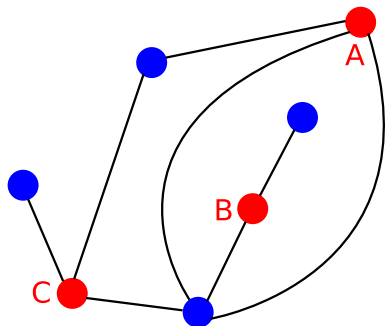
# Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



# Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



## Question

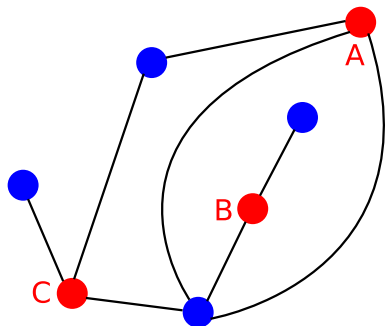
Y a-t-il dans  $D(G)$  une forêt où :

- $A$ ,  $B$  et  $C$  sont dans des comp. connexes différentes ;
- $A$  a exactement 1 voisin ;
- $B$  a exactement 1 voisin ;
- $C$  a exactement 2 voisins ?



# Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



## Question

Y a-t-il dans  $D(G)$  une forêt où :

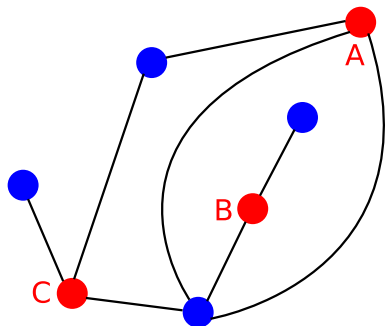
- $A$ ,  $B$  et  $C$  sont dans des comp. connexes différentes ;
- $A$  a exactement 1 voisin ;
- $B$  a exactement 1 voisin ;
- $C$  a exactement 2 voisins ?

$$\begin{array}{l} \text{CN : } \\ | \text{Voisins}(A) | \geq 1 \\ | \text{Voisins}(B) | \geq 1 \\ | \text{Voisins}(C) | \geq 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{Voisins}(B) \cup \text{Voisins}(C) | \geq 1 + 2 \\ | \text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(C) | \geq 1 + 2 \\ | \text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(B) | \geq 1 + 1 \end{array}$$

(Lemme des mariages de Hall)

# Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



## Question

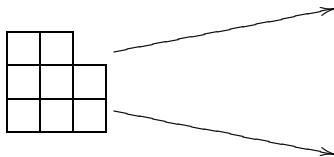
Y a-t-il dans  $D(G)$  une forêt où :

- $A$ ,  $B$  et  $C$  sont dans des comp. connexes différentes ;
- $A$  a exactement 1 voisin ;
- $B$  a exactement 1 voisin ;
- $C$  a exactement 2 voisins ?

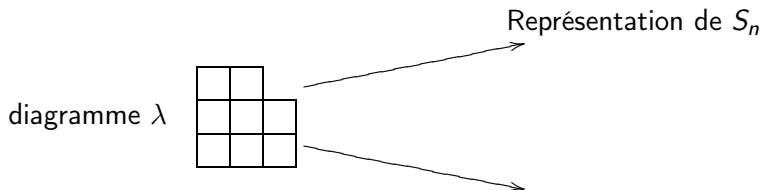
$$\text{OUI} \Leftrightarrow \begin{cases} |\text{Voisins}(A)| > 1 & |\text{Voisins}(B) \cup \text{Voisins}(C)| > 1 + 2 \\ |\text{Voisins}(B)| > 1 & |\text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(C)| > 1 + 2 \\ |\text{Voisins}(C)| > 2 & |\text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(B)| > 1 + 1 \end{cases}$$

# Conséquences sur les caractères

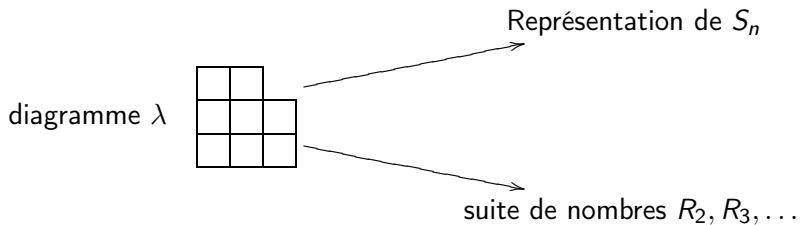
diagramme  $\lambda$



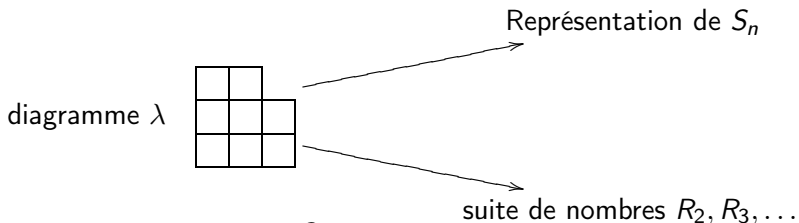
# Conséquences sur les caractères



# Conséquences sur les caractères



# Conséquences sur les caractères

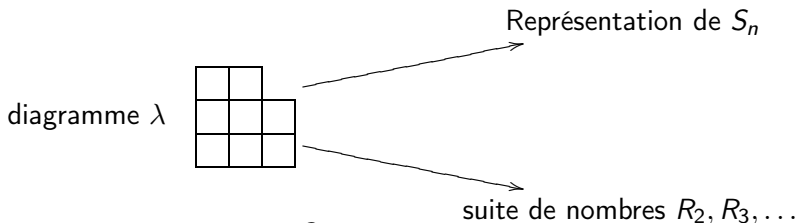


Fixons une permutation  $\sigma \in S_n$ .

## Problème

Exprimer caractère  $\chi^\lambda(\sigma)$  en fonction des  $R_i$ .

# Conséquences sur les caractères



Fixons une permutation  $\sigma \in S_n$ .

## Problème

Exprimer caractère  $\chi^\lambda(\sigma)$  en fonction des  $R_i$ .

- C'est un polynôme ;
- grâce aux résultats combinatoires précédents : les coefficients comptent certaines familles de graphes.

# Fin de l'exposé

Merci pour votre attention.

Des questions ?