

LA LOGIQUE
NON-COMMUTATIVE,
10 ANS APRÈS

V. Michele Abrusci

2010-12-15, LaBRI, Bordeaux

LOGIQUE NON-COMMUTATIVE

La logique non-commutative a été introduite en 2000 (Abrusci & Ruet, *Non-commutative logic*, APAL, 2010).

Dans ce système

- il y a les connecteurs multiplicatifs de la logique linéaire

conjonction \otimes et disjonction \wp

et aussi les nouveaux connecteurs multiplicatifs non-commutatifs

conjonction \otimes et disjonction ∇

- on a cette relation entre ces connecteurs:

$$A \otimes B \vdash A \odot B$$

$$A \nabla B \vdash A \wp B$$

- on retrouve la logique linéaire, en particulière sans les connecteurs multiplicatifs non-commutatifs on a exactement la logique linéaire,
- on retrouve le calcul de Lambek, si on garde seulement les deux connecteurs multiplicatifs non-commutatifs on a exactement une extension conservative classique du calcul de Lambek, et en particulier si on prend sa version intuitionniste (une seule conclusion, avec plusieurs prémisses) on a exactement le calcul de Lambek.

LOGIQUE NON-COMMUTATIVE: CALCUL DES SEQUENTS,

La logique non-commutative a permis de comprendre des choses importantes à propos du calcul des sequents.

Considérons un sequent

$$\Gamma \vdash A$$

- si les prémisses Γ ne sont pas ordonnées, l'ensemble formé de ces prémisses et de A n'est pas ordonné et nous pouvons le représenter par un ordre quelconque avec le "focus" sur une de ces formules;
- si les prémisses Γ sont un ordre total, l'ensemble formé de ces prémisses

et de A est un ordre cyclique, et nous pouvons le représenter par des autres ordres totaux qui correspondent au cet ordre cyclique;

- si les prémisses Γ son un ordre partiel, l'ensemble formé de ces prémisses et de A est une variété d'ordre (une généralisation de l'ordre cyclique, introduite par la Logique Non-Commutative), et nous pouvons le représenter par des autres ordres partiels qui correspondent à cette variété d'ordre;
- le choix d'écrire un sequents comme un particulier ordre total ou partiel dépend de la formula sur la quelle on "focalise" pour appliquer une

règle (chaque règle impose de focaliser sur certains formules dans la prémisse ou dans les prémisses, et sur une formule dans la conclusion)

La focalisation dans les preuves est un sujet très important de recherche, développé par la logique linéaire et qui est à la base de la ludique.

LOGIQUE NON-COMMUTATIVE: CALCUL DE LAMBEK

La Logique non-commutative s'offre comme une

- une extension *classique* du Calcul de Lambek, en ajoutant la dualité;
- une extension du même Calcul en admettant même la conjonction multiplicative commutative et la implication qui est associé à cette conjonction.

Mais cette offerte a été peu utilisée, parce que:

- on n'a pas compris le rôle de la dualité dans l'analyse conduite par le Calcul de Lambek;
- on n'a pas compris que étendre le calcul de Lambek en admettant ordres partiels des prémisses signifie considérer variétés d'ordres, et que déjà le calcul de Lambek est basé sur l'ordre cyclique.

Quand dans la langue on considère même celui qui écoute (pas seulement celui qui parle): est-ce que on va considérer la dualité? est-ce que l'ordre totale devient un cycle, et l'ordre partiel une variété d'ordre?

LOGIQUE NON-COMMUTATIVE: PARTIALITÉ'

La logique non-commutative fait comprendre que ajouter le non-commutatif signifie passer du "total" au "partiel"; mieux, se restreindre seulement au commutatif signifie se limiter à considérer seulement ce qui est total.

On a déjà vu que dans le calcul des sequents on introduit les ordres partiels et les *variétés d'ordre* (quelque chose comme ordre cycliques partiels).

Mais plus au fond: si la définition des connecteurs est donnée par leur comportement dans les preuves (comme graphes) et dans l'interaction avec les

autres preuves, donc par les "interrupteurs" (prescriptions de voyage de l'information), alors:

- pour les connecteurs multiplicatifs commutatifs on utilise seulement des "interrupteurs totaux"
- pour les connecteurs multiplicatifs non-commutatifs on utilise même des interrupteurs "partiels" qui - dans certains cas - ne disent pas où il faut aller... (le voyage s'arrête)

LOGIQUE NON-COMMUTATIVE: RAFFINEMENT DE LA LOGIQUE LINÉAIRE

La logique linéaire est un raffinement de la logique classique (et de la logique intuitionniste), dans le sens que des choses qui sont "cachées" en logique classique (ou intuitionniste) sont "dévoilées" en logique linéaire (cause l'absence des règles structurelles et le traitement logique des ces règles par les connecteurs exponentiels).

La logique non-commutative est un raffinement de la logique linéaire en un sens différent.

Les preuves de la logique non-commutative sont les mêmes que dans la logique linéaire, où on a décidé:

- de forcer la présence d'un ordre parmi les conclusions (en éliminant des interrupteurs de voyage);
- de décrire l'ordre parmi les conclusions (en ajoutant des interrupteurs partiels de voyage)

Si on oublie ces actions, on retourne à la logique linéaire...

Forcer un ordre / décrire un ordre: deux actions, l'une "duale" de l'autre...

La logique non-commutative comme logique qui prévoit la possibilité de "forcer, imposer" un ordre et de "décrire" un ordre...

"Imposer un ordre" : acte "positif"
(créatif), connecteurs positifs

"Décrire un ordre" : acte "négatif"
(descriptif), connecteurs négatifs.

Distinction entre "positif" et "négatif"
: une des découvertes importantes de
la logique linéaire, à la base de la ludique,
une distinction qui se trouve au coeur
de la logique non-commutative.

LOGIQUE NON-COMMUTATIVE: CALCUL

La logique non-commutative est un raffinement de la logique linéaire qui ne change pas le concept de calcul.

C'est-à-dire: les règles de la réduction des coupures (qui sont les règles de calcul quand les preuves sont des programmes) ne changent pas en logique non-commutative.

La logique non-commutative permet de "mieux exprimer", pas de "calculer en façon différente".

La logique linéaire n'appartient pas au niveau de la considération des vérités (elle a les mêmes vérités...), elle

n'appartient pas au niveau de la considération des calculs , elle appartient au niveau de la proposition des nouvelles règles de communication, de la élaboration de nouvelles règles partagées...