

# Sujet de thèse

## PROBLEMES DE COLORATION D'ARETES DES GRAPHES DISTANCES ET CIRCULANTS

Laboratoire d'accueil :

- LaBRI, UMR 5800, Université de Bordeaux

Encadrants :

- Hervé HOCQUARD, Maître de conférences, Université de Bordeaux, [herve.hocquard@labri.fr](mailto:herve.hocquard@labri.fr), <http://www.labri.fr/perso/hocquard/>
- Éric SOPENA, Professeur, Université de Bordeaux, [eric.sopena@labri.fr](mailto:eric.sopena@labri.fr), <http://www.labri.fr/perso/sopena/>

Équipe du LaBRI :

- Combinatoire et Algorithmique, thème « Graphes et Optimisation », <http://graphesetoptimisation.labri.fr/>

---

### DESCRIPTION DU SUJET

#### • Préambule

Le but de cette thèse est d'étudier différents types de coloration de graphes, en se focalisant sur les colorations d'arêtes des graphes distances et des graphes circulants.

Une *k-coloration d'arêtes* (impropre) d'un graphe non orienté  $G$  est une application qui associe à chaque arête du graphe une couleur prise dans l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$ . Une telle coloration est dite propre si on associe des couleurs distinctes aux arêtes ayant une extrémité commune.

Un *graphe distance* est un graphe infini ayant pour ensemble de sommets l'ensemble des entiers relatifs. Les arêtes d'un tel graphe sont définies à l'aide d'un ensemble fini  $D$  de générateurs (entiers positifs) : deux sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête si et seulement si  $|x - y| = d$ , avec  $d \in D$ .

Un *graphe circulant* est un graphe fini, défini de manière similaire. Le graphe circulant  $G(n, D)$  a pour ensemble de sommets l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n - 1\}$  et pour arêtes les couples  $(i, j)$  tels que  $j \equiv i + d \pmod{n}$ , avec  $d \in D$ .

La coloration de graphe est un domaine extrêmement riche de la théorie des graphes. On s'intéressera principalement ici à différents types de coloration d'arêtes tels que, par exemple, ceux présentés ci-dessous.

#### • Colorations « fortes » d'arêtes

Une *k-coloration d'arêtes* (propre) est dite *forte* si les arêtes à distance deux (c'est-à-dire telles qu'il existe une arête reliant une extrémité de l'une à une extrémité de l'autre) ont des couleurs distinctes. L'indice chromatique fort de  $G$  est alors le plus petit entier  $k$  pour lequel  $G$  admet une *k-coloration d'arêtes forte*.

La notion de *k-coloration forte d'arêtes* peut être étendue au cas plus général des colorations *d-fortes*, où l'on requiert cette fois que les arêtes à distance inférieure ou égale à  $d$  soient colorées avec des couleurs distinctes (la coloration d'arêtes forte correspond alors à la notion de coloration 2-forte d'arêtes).

#### • Colorations « de packing »

Un autre type de coloration (de sommets), basé sur un critère de distance, a été introduit par Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall. Une coloration *de packing* d'un graphe non orienté  $G$  est une application qui associe à chaque sommet du graphe une couleur prise dans l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$  de façon telle que si la couleur  $i$  est attribuée à deux sommets distincts  $u$  et  $v$  alors la distance entre  $u$  et  $v$  est strictement supérieure à  $i$ . Le *nombre chromatique de packing* d'un graphe est alors le plus petit  $k$  pour lequel le graphe admet une telle coloration. Cette définition s'étend aisément au cas de la coloration d'arêtes. Il s'agit ici d'un nouveau type de coloration, non encore considéré à notre connaissance.

#### • Colorations d'arêtes « localement distinguantes »

Une coloration d'arêtes (propre ou impropre) d'un graphe est dite *localement distinguante* si, pour toute paire de sommets adjacents  $\{x, y\}$ ,  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ , où la fonction  $\varphi$  associe à chaque sommet  $x$  une valeur dépendant des couleurs des arêtes incidentes au sommet  $x$  (par exemple la somme des couleurs, l'ensemble ou le

multi-ensemble des couleurs, etc.). On cherche alors à minimiser le nombre de couleurs nécessaires pour qu'une coloration d'arêtes soit localement distinguante.

La version « *totalelement distinguante* », pour laquelle on cherche à distinguer tous les sommets (et non seulement les sommets adjacents) peut également être considérée dans le cas des graphes circulants.

- **Jeux de coloration**

Dans le jeu de coloration « classique », les deux joueurs, Alice et Bob, choisissent à tour de rôle un sommet non coloré et lui attribuent une couleur (en respectant la contrainte de coloration considérée) prise dans un ensemble prédéfini de  $k$  couleurs. Si, au terme de la partie, l'ensemble du graphe est coloré, Alice gagne la partie. Dans le cas contraire, Bob est déclaré vainqueur. La plus petite valeur de  $k$  pour laquelle Alice possède une stratégie gagnante avec un ensemble de  $k$  couleurs est le *nombre chromatique ludique* du graphe.

Ce type de jeu de coloration s'étend naturellement au cas des différents types de colorations d'arêtes présentés. À notre connaissance, seul le jeu de coloration d'arête propre a été considéré jusqu'ici.

#### **PLAN DE TRAVAIL**

L'étude de chacun des autres types de colorations d'arêtes nécessite dans un premier temps de se familiariser avec leur version « coloration de sommets » afin d'appréhender les principales techniques du domaine et de voir dans quelle mesure elle peuvent être réutilisées dans le cadre des colorations d'arêtes, et plus particulièrement pour les graphes distances et/ou circulants.

De façon similaire, se familiariser avec les jeux de coloration déjà étudiés dans la littérature est une étape indispensable pour appréhender de façon efficace la version « jeu » des colorations proposées dans le cadre de cette thèse.

#### **BIBLIOGRAPHIE**

La bibliographie sur les questions de coloration de graphes est très riche. La lecture des ouvrages suivants s'avèrera sans aucun doute une source riche d'inspiration.

- Gary Chartrand and Ping Zhang. *Chromatic Graph Theory*. CRC Press, Taylor & Francis Group (2009).
- Tommy R. Jensen and Bjarne Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons (1995).