

Devoir

Probabilités et statistiques pour l'informatique, L3 MIAGE

Durée : 1H15

lundi 25 octobre 2021

Les calculatrices sont autorisées, ainsi qu'une feuille manuscrite recto/verso de notes de cours. Chaque réponse (hormis l'exercice 1) est à **JUSTIFIER**.

Exercice 1 : Cours

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , et A, B deux évènements.

1) Recopier la(les) bonne(s) réponse(s) : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda + X] &= \mathbb{E}[X] & \text{ou} & \lambda + \mathbb{E}[X] & \text{ou} & \lambda \cdot \mathbb{E}[X] & \text{ou} & \lambda^2 \cdot \mathbb{E}[X] \\ \text{Var}(\lambda \cdot X) &= \text{Var}(X) & \text{ou} & \lambda + \text{Var}(X) & \text{ou} & \lambda \cdot \text{Var}(X) & \text{ou} & \lambda^2 \cdot \text{Var}(X) \end{aligned}$$

2) Sous quelle(s) condition(s) peut-on écrire :

a) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

b) $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

3) Donner la formule exprimant $\mathbb{P}[A|B]$ en fonction de $\mathbb{P}[B|A]$ en supposant que l'on a $\mathbb{P}[A] \neq 0$ et $\mathbb{P}[B] \neq 0$.

Rappelez le nom de cette formule et démontrez-la.

Exercice 2 : Probabilités conditionnelles

Nous sommes en 2025 et 98% de la population est à présent vaccinée contre le COVID-19. Les médias rapportent l'information suivante : *"parmi les 10000 personnes hospitalisés, il y a autant de vaccinés que de non-vaccinés"*.

On choisit une personne aléatoirement dans un échantillon de 1 million de personnes, selon une loi uniforme. On note H l'évènement "l'individu est hospitalisé", V l'évènement "l'individu est vacciné" et N l'évènement "l'individu est non-vacciné".

1. Donner les probabilités suivantes : $\mathbb{P}[H]$, $\mathbb{P}[V]$, $\mathbb{P}[N]$.

2. Quelle est la probabilité d'être vacciné en sachant que l'on est hospitalisé ?

3. Calculer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}[H | V]$ et $\mathbb{P}[H | N]$, ainsi que le rapport $\frac{\mathbb{P}[H | N]}{\mathbb{P}[H | V]}$.

Exercice 3 : Notations et passages au tableau

Il y a 30 étudiants dans la classe, et le TD du jour comporte 10 exercices. Le professeur souhaite faire corriger chaque exercice au tableau par un étudiant : il tire aléatoirement, selon une loi uniforme, 10 étudiants successivement. Le professeur est clément et ne fait pas passer un étudiant au tableau plus d'une fois.

1. L'étudiant A n'a pas révisé son TD et a peur d'être sélectionné. Quelle est la probabilité pour qu'il ne soit pas encore passé après k tours ? ($k \in \{1, \dots, 10\}$)
2. Quelle probabilité a-t-il de ne pas passer au tableau aujourd'hui ?

Le professeur s'aperçoit que les étudiants déjà passés sont si soulagés qu'ils bavardent et ne suivent plus la correction. A la séance suivante, le professeur décide de tirer ses étudiants aléatoirement et toujours selon une loi uniforme, **avec remise** cette fois (un étudiant peut donc repasser plusieurs fois). Il y a n exercices, $n \geq 1$. L'étudiant A n'a toujours pas révisé. On note X_A la variable aléatoire représentant son tour de passage.

3. Calculer la probabilité $\mathbb{P}[X_A = n]$ que l'étudiant A passe au tableau pour la première fois au dernier exercice.
4. Donner l'espérance de X_A .

Le professeur note ses N copies de DS avec une méthode bien particulière, qui lui fait gagner un temps précieux : il jette les N copies dans un escalier à 21 marches (numérotées de 0 à 20), et si une copie tombe sur la marche numéro i , elle obtient la note de $i/20$.

On note X_i la variable aléatoire représentant la marche sur laquelle la copie i va tomber. On suppose que X_i prend une valeur dans $\{0, \dots, 20\}$ selon une loi uniforme, et que les lancers sont indépendants. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de copies ayant une note supérieure ou égale à $10/20$.

5. Calculer la probabilité $\mathbb{P}[Y = N]$ que toutes les copies aient une note d'au moins $10/20$.
6. Donner la loi de probabilité de Y et son espérance $\mathbb{E}[Y]$.

Un jour, les 60 étudiants entrent dans la salle de cours dans un ordre aléatoire uniforme a_1, a_2, \dots, a_{60} . La semaine suivante, ils entrent dans un ordre aléatoire uniforme b_1, b_2, \dots, b_{60} .

7. Quelle est la probabilité pour que ces deux ordres soient identiques ?
(pour comparaison, on rappelle que l'univers contient approximativement 10^{80} atomes)

Exercice 4 : Jeu télévisé

Vous participez à un jeu télévisé. Vous avez trois portes devant vous, numérotée 1, 2, 3 : l'une, notée p , est gagnante et cache un cadeau, les deux autres sont vides. Vous choisissez initialement la porte $k \in \{1, 2, 3\}$. Le présentateur ouvre alors une **autre** porte k' **perdante** et différente de k .

Le présentateur vous propose alors de soit garder la porte k , soit de changer en prenant la seule autre porte encore fermée (celle qui n'est ni k ni k'), avant de découvrir si vous avez gagné.

Soit X la variable aléatoire représentant la porte que vous choisissez **initialement**. On note G l'événement "gagner".

1. On suppose que l'on adopte la stratégie de **ne pas changer de porte**. Donner sans calcul (mais en justifiant) la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{CH}}[G]$ de gagner avec cette stratégie.

On suppose maintenant que l'on décide de **changer de porte** lorsqu'on nous le propose.

2. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_{CH}[G|X \neq p]$ de gagner en sachant que l'on a choisi une mauvaise porte initialement ?
3. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_{CH}[G|X = p]$ de gagner si l'on a fait le bon choix initialement ?
4. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_{CH}[G]$ de gagner avec cette stratégie, et en déduire la meilleure stratégie à adopter.