

Devoir Surveillé

Probabilités et statistiques pour l'informatique, L3 MIAGE

Lundi 07 Novembre 2022 - Durée : 1H15

Les calculatrices sont autorisées, ainsi qu'une feuille manuscrite recto/verso de notes de cours. Chaque réponse (hormis l'exercice 1) est à **justifier**. Les questions sont indépendantes.

Exercice 1 : Cours

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , et A, B deux événements.

1) Recopier la(les) bonne(s) réponse(s) : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}[\lambda \cdot X] = \mathbb{E}[X] \quad \text{ou} \quad \lambda + \mathbb{E}[X] \quad \text{ou} \quad \lambda \cdot \mathbb{E}[X] \quad \text{ou} \quad \lambda^2 \cdot \mathbb{E}[X] \\ \text{Var}(\lambda + X) = \text{Var}(X) \quad \text{ou} \quad \lambda + \text{Var}(X) \quad \text{ou} \quad \lambda \cdot \text{Var}(X) \quad \text{ou} \quad \lambda^2 \cdot \text{Var}(X) \end{array}$$

2) Sous quelle(s) condition(s) peut-on écrire :

- a) $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
- b) $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

3) Étant donné une partition (E_1, \dots, E_n) d'un ensemble Ω , et une variable aléatoire A à valeurs dans Ω , exprimez la formule des probabilités totales pour A et (E_1, \dots, E_n) .

4) On rappelle la formule de Bayes, pour deux variables aléatoires A, B , en supposant que $\mathbb{P}[B] \neq 0$: $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B|A]}{\mathbb{P}[B]}$. Démontrez-la.

Exercice 2 : Probabilités conditionnelles

Au cours des 20 dernières élections présidentielles américaines, seuls 3 des candidats qui avaient gagné l'état de Floride ont perdu l'élection (donc 3 candidats ayant perdu la Floride ont gagné l'élection). Pour la prochaine élection, on donne au candidat Whitmore 7 chances sur 10 de remporter la Floride.

On note G l'événement "remporter l'élection", et F l'événement "remporter la Floride".

1. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}[G]$ que Whitmore remporte l'élection ?
2. Le candidat Whitmore gagne finalement l'élection. Quelle est la probabilité qu'il ait gagné la Floride ?

Exercice 3 : Lootboxes

Un joueur de jeu vidéo achète des lootboxes, ou boîtes surprises, par lots de 10. Chaque boîte contient un objet, qui est **en or** avec une probabilité $p \in [0, 1]$.

1. Quelle est la probabilité que le joueur obtienne au moins un objet en or dans un lot de 10 boîtes ?
2. Quelle est la probabilité qu'il en obtienne exactement k , avec $k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$?
3. Combien obtient-il d'objets en or en moyenne ?
(On ne demande pas de calcul à cette question.)

Ne parvenant pas à gagner à son jeu sans objet en or, il décide d'acheter des boîtes, une par une, jusqu'à obtenir un objet en or.

4. Quelle est la probabilité que le joueur ait besoin de n boîtes ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) pour obtenir son premier objet en or ?
5. Si une boîte coûte 5 euros, et que la probabilité d'obtenir un objet en or est de $1/30$, combien doit dépenser en moyenne un joueur pour obtenir un objet en or ?

Un joueur fortuné achète 1000 boîtes. Parmi elles, 32 contiennent un objet en or. Les boîtes contiennent soit une épée, soit un casque, soit un bouclier. Parmi les 1000 boîtes achetées, 375 contenaient des boucliers, et parmi eux, 12 étaient en or.

6. Les événements "contenir un objet en or" et "contenir un bouclier" sont-ils indépendants ?

Exercice 4 : Machine Enigma

La machine *Enigma* était utilisée par les Allemands pendant la Seconde Guerre Mondiale pour chiffrer leurs communications. Avant la fameuse cryptanalyse d'Alan Turing, l'efficacité de la machine était assurée par le nombre immense de combinaisons initiales de la machine. Nous nous proposons de les dénombrer.

Pour chiffrer un message, l'opérateur doit d'abord choisir 3 rotors parmi un jeu de 5, et les placer dans la machine dans un ordre de son choix.

1. Combien d'arrangements possibles cette étape produit-elle ? On note ce nombre A .

On fixe à présent un ensemble de 3 rotors et un ordre. Chacun des 3 rotors doit être configuré dans une de ses 26 positions de départ, une pour chaque lettre de l'alphabet.

2. Combien de configurations de départ sont possibles ? On note ce nombre B .

Enfin, l'opérateur doit placer 10 câbles sur un tableau de connexions, chacun reliant 2 lettres parmi les 26 de l'alphabet. Chaque lettre est touchée par au plus un câble.

3. Combien y a-t-il de manières de placer le premier câble ?
4. Combien y a-t-il de manières de placer le k -ème câble, si les $k-1$ premiers sont posés ? (pour $k \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$)
5. En déduire le nombre C de manières de placer les 10 câbles, en tenant compte de l'ordre.
6. Combien y a-t-il d'ordres possibles des 10 câbles ? (Autrement dit, combien y a-t-il de permutations d'un ensemble à 10 éléments ?) On note ce nombre D .

7. Le nombre de combinaisons initiales de la machine est donc $E = A \times B \times \frac{C}{D}$, calculer sa valeur.