

Rappels de maths

Probabilités, L3 MIAGE

1 Notions de base

1.1 Notations

Soit u_1, u_2, \dots, u_n des réels. On note :

Somme :
$$\sum_{i=1}^n u_i = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Produit :
$$\prod_{i=1}^n u_i = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

Autre écriture :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$$

Factorielle :
$$n! = \prod_{i=1}^n i$$

Coefficient binomial :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Il s'agit du nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

On peut réindicer une somme finie : par exemple

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n u_{n-k}$$

NB : si les sommes sont infinies (séries), il faut vérifier certaines hypothèses. Dans le cadre de ce cours, on considèrera que c'est toujours vrai.

1.2 Fractions

Au vu des copies des années précédentes, il semble important de rappeler le programme de 4ème : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Pour éviter d'avoir des calculs trop complexes lors de l'addition de fractions, on peut, lorsque l'on met les deux fractions sous le même dénominateur, prendre n'importe quel multiple commun de b et d (le plus petit par exemple, i.e. le ppcm).

Par exemple :
$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$

1.3 Théorie des ensembles

Ensembles

Un ensemble est une collection d'objet distincts. Si E un ensemble contenant deux éléments a et b avec $a \neq b$, on note $E = \{a, b\} = \{b, a\}$ (l'ordre n'a aucune importance).

Soit E un ensemble et $A, B \subseteq E$ deux sous-ensembles. On rappelle que :

- l'union de deux ensembles A et B est :
 $A \cup B = \{x \in E | x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- l'intersection de deux ensembles A et B est :
 $A \cap B = \{x \in E | x \in A \text{ et } x \in B\}$

Exemples d'ensembles du TD

- $\{Pile, Face\}$ pour un lancer de pièce,
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pour un lancer de dé,
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{-1, -2, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs,
- \mathbb{Q} l'ensemble des rationnels (des fractions),
- \mathbb{R} l'ensemble des réels. Note : les réels ne sont pas tous rationnels, par exemple : π ou encore $e = \exp(1)$.

Méthodes de preuves Pour montrer que :

- $A \subseteq B$, on montre que pour tout élément x de A , on a bien : $x \in B$.
- $A = B$, on montre que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.
- $A \cup B = C$, on montre que pour tout élément x de C , on a bien : $x \in A$ ou $x \in B$.
- $A \cap B = C$, on montre que pour tout élément x de C , on a bien : $x \in A$ et $x \in B$.

Distributivité :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Loi de De Morgan :

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Séquence ou n -uplet

Un n -uplet est une séquence de n éléments que l'on note (a_1, a_2, \dots, a_n) . Si $n = 2$, on parle d'un couple ; si $n = 3$, c'est un triplet. Attention à ne pas confondre ensemble et séquence :

- l'ordre est important pour les séquences et non pour les ensembles : si $a \neq b$, alors $(a, b) \neq (b, a)$ mais $\{a, b\} = \{b, a\}$,
- un élément peut être plusieurs fois présent dans une séquence : $(a, a) \neq (a)$ mais $\{a, a\} = \{a\}$.

Exemple : si vous lancez une pièce 3 fois de suite, le triplet $(Pile, Face, Pile)$ vous permet de représenter que vous avez obtenu pile puis face et enfin pile. Ce qui est différent de $(Face, Pile, Pile)$, où l'on commence par faire face.

1.4 Dérivée

Soient f, g fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

Fonction	Dérivée
$\lambda f(x)$	$\lambda f'(x)$
λ	0
x^n	nx^{n-1}
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$g'(x) \cdot f'(g(x))$

1.5 Intégrale

Soit f, F, g fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Si $F' = f$:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Si f, g dérivables : [Intégration par parties]

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Dans le cadre de ce cours, on considèrera que la propriété suivante est toujours vraie :

$$\int_a^b f(x) = \int_a^b g(x) \implies f = g$$

(le vrai énoncé, disant que f et g sont égales "presque partout", n'est pas à connaître)

2 Outils pour les lois classiques

2.1 Somme arithmétique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.2 Binôme de Newton

Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.3 Exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

2.4 Série géométrique

Pour tout $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Si $|x| < 1$,

$$\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$$