

TD 2 : Probabilités d'événements

Exercice 1. Vous avez une boîte contenant 15 gâteaux dont 5 périmés. Pour écouler les stocks, vous en proposez à un ami qui en choisit 3 en même temps. On définit les événements suivants :

- A : les 3 gâteaux sont périmés,
- B : exactement un gâteau est périmé,
- C : au moins un est périmé,
- D : au moins un est frais.

Calculer $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[C]$, $\mathbb{P}[A \cap B]$, $\mathbb{P}[A \cup B]$, $\mathbb{P}[A \cup C]$ et $\mathbb{P}[C \cup D]$.

Exercice 2. On vous donne la loi de probabilité d'un dé truqué à six faces :

i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1

On définit les événements suivants :

$$A = \{i, i \leq 4\}, B = \{i, i \geq 2\}, C = \{i, i < 4\}$$

Calculer $\mathbb{P}[A]$, $\mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[C]$, $\mathbb{P}[A \cap B]$, $\mathbb{P}[A \cap C]$, $\mathbb{P}[B \cap C]$.

Exercice 3. On joue une grille de Loto : on choisit 5 numéros distincts entre 1 et 49, puis un numéro "chance" entre 1 et 10. Ensuite, un tirage aléatoire uniforme est fait et on compare avec les nombres choisis (peu importe l'ordre).

- On décide de jouer 1, 2, 3, 4, 5, 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi les 6 numéros correctement ?
- Et si on joue 29, 12, 45, 21, 37, 8 ?

Exercice 4.

1. Une urne contient 8 boules blanches et 6 boules noires, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée. On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - 3 blanches et 2 noires ?
 - des boules de couleurs différentes ?
 On tire successivement 5 boules **avec remise** de chaque boule tirée. Quelle est la probabilité d'avoir :
 - 3 blanches puis 2 noires ?
 - 3 blanches et 2 noires dans un ordre quelconque ?
2. Cette fois l'urne contient 3 boules rouges, 2 boules bleues et 5 boules vertes.
 - On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges, 1 boule bleue et 2 boules vertes ?
 - On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur ?
 - On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir des boules ayant au moins deux couleurs différentes ?

Exercice 5. On permute les lettres d'un mot dans un ordre aléatoire uniforme et on veut savoir quelle est la probabilité de retomber sur le même.

1. Qu'en est-il pour le mot "*manger*" ?
2. Pour "*aubergine*" ?

TD 2 : Probabilités d'évènements

3. Et pour "*baobab*" ?

4. Quelle est la probabilité que les "*a*" se suivent si le mot est "*canard*" ?

Exercice 6. Pour éviter les transports en communs surchargés, un chercheur décide de venir au travail en voiture. Sur la route, il rencontre 5 feux de circulation tricolores. Chaque feu a le même fonctionnement : le rouge ne dure 15 secondes, l'orange 5 secondes et le vert 40 secondes. Il n'y a aucune synchronisation entre les feux, aucune dépendance.

1. Il arrive devant un feu. Quelle est la probabilité que ce feu soit vert ?
2. Quelle est la probabilité que sur son trajet, l'automobile rencontre exactement 3 feux verts ?
3. Quelle est la probabilité que le 2ème feu soit vert, le 3ème orange et le 4ème rouge ?

Exercice 7. On rappelle qu'en 2021, il y a 365 jours. On suppose que la distribution de probabilité des anniversaires est uniformément répartie sur l'année. Vous êtes dans un groupe de 10 personnes.

1. Quelle est la probabilité que quelqu'un du groupe ait le même anniversaire que vous ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes du groupe aient le même anniversaire ?
3. Quelle est cette probabilité si le groupe contient 30 personnes ?

Exercice 8. On a vu dans le cours que si A, B sont deux évènements, alors :

$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$$

On va généraliser cette formule.

1. Soit A, B, C trois évènements. Montrer que :

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[A \cap C] - \mathbb{P}[B \cap C] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]$$

2. (Difficile) Soient $A_1, \dots, A_n$ n évènements. Montrer par récurrence que :

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right] = \sum_{I \subset \llbracket 1; n \rrbracket} (-1)^{|I|+1} \mathbb{P}\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right]$$

Précision :

- $\llbracket 1; n \rrbracket$ est l'intervalle discret de 1 à n . Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres *entiers* entre 1 et n inclus.
- $\sum_{I \subset \llbracket 1; n \rrbracket}$ est la somme sur tous les sous-ensembles (notés I) de l'intervalle discret $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Par exemple, si $n = 3$, alors :

- $\llbracket 1; 3 \rrbracket = \{1; 2; 3\}$,
- I prend les valeurs suivantes : $\{1; 2; 3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ et $\emptyset$.

On appelle cette formule le principe d'inclusion-exclusion, qui peut être vu comme une version probabiliste de la formule du crible.

Exercice 9. (Difficile) Montrer qu'il est plus probable que le jour de l'an soit un dimanche qu'un samedi.

Indication 1. On rappelle qu'une année non bissextile contient 365 jours et une année bissextile 366. De plus, une année est bissextile si elle est dans un des deux cas suivants :

- elle est un multiple de 400 (exemples : 1600, 2000),
- elle est un multiple de 4 mais pas de 100 (exemple : 2020, mais pas 1900).

Indication 2. Montrer que le même cycle de jour se répète tous les 400 jours.