

TD 3 : Espérance

Exercice 1. Dans un atelier textile, la température exprimée en Fahrenheit, ne s'écarte jamais de plus de 2 degrés de 62 degrés. Plus précisément, la température est une variable aléatoire F de distribution :

f	60	61	62	63	64
$\mathbb{P}[F = f]$	0.05	0.25	0.4	0.25	0.05

1. Calculer l'espérance et la variance de F .
2. On a décidé de lire la température sur l'échelle des degrés Celcius qui satisfait $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.
Quelle est l'espérance et la variance de la température exprimée en degrés Celcius ?

Exercice 2. Eugène Ionesco nous apprend que les êtres humains peuvent se transformer en rhinocéros, et ce à vitesse grandissante. Au premier jour, il n'y a qu'un seul rhinocéros. Puis chaque jour, il y en a 3 fois plus que la veille. De plus, il y a en tout 3^n individus (humains ou rhinocéros) dont vous faites partie. Les individus qui se transforment chaque jour sont choisis aléatoirement (uniforme).

Soit X le nombre de jour avant que vous ne vous transformiez en rhinocéros. Calculer $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 3. On se donne une boule bleue et n boules vertes. On joue au jeu suivant : on tire successivement deux boules *avec* remise. Deux cas :

- on perd $(n + 1)^2$ euros si les boules sont de la même couleur,
- et on gagne $2(n + 1)^2$ euros sinon.

Soit X le gain.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Montrer que $\mathbb{E}[X] = -n^2 + 4n - 1$.
3. Dans quels cas gagne-t-on de l'argent ?
4. Si on peut choisir le nombre de boules vertes, que choisit-on ?

Exercice 4. On possède une pièce de monnaie truquée de telle sorte que la probabilité d'obtenir pile soit 0,3.

1. On lance 10 fois la pièce. Soit $k \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$. Quelle est la probabilité d'obtenir k fois pile ? Combien de piles obtient-on en moyenne ?
2. On lance la pièce jusqu'à ce que l'on obtienne pile pour la première fois. Combien effectuera-t-on en moyenne de lancers ?

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique.

1. Décrire une expérience simple qui permet d'observer X .
2. Donald Drum prend une décision chaque jour. On suppose qu'entre deux décisions absurdes, le nombre de jours correspond à la variable aléatoire X . On observe qu'en moyenne, ce nombre de jours est de 3. Donald vient de prendre une décision absurde aujourd'hui. Quelle est la probabilité que la prochaine soit dans au moins 3 jours ?

Exercice 6. Soit X variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

1. Rappeler ce que vaut $\mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $Var(X)$.

Exercice 7. La chaîne de télévision BFAKETV relaye 200 informations chaque jour, mais en moyenne, seulement 1% sont correctes. Calculer la probabilité des événements suivants :

TD 3 : Espérance

1. il y a exactement deux vraies infos,
2. il y a au moins deux vraies infos.

Quant à elle, la chaîne Coyote News n'est qu'à 0.5% de véracité, tout en présentant autant d'informations par jour. Si on regarde toutes les informations de ces deux chaînes pendant deux jours entiers, quelle est la probabilité de ne voir que 3 vraies infos ?

Exercice 8. Lors d'un devoir, vous jouez au jeu suivant : vous misez sur un nombre x entre 1 et 6. Puis vous lancez 3 dés à 6 faces non pipés. Si k est le nombre de dés qui tombent sur x , vous gagnez k points au devoir. Si aucun dé ne tombe sur x , vous perdez un point. Calculez l'espérance du gain.

Exercice 9. Dans votre ville natale, il n'y plus que 3 médecins. Trois personnes tombent malades en même temps et vont consulter un des médecins, choisi aléatoirement selon une distribution uniforme. Quelle est l'espérance du nombre de médecins qui reçoivent au moins un patient ?

Exercice 10. Un joueur joue contre un casino à pile ou face. Il mise la première fois une somme x . Le principe du jeu est le suivant :

- Si le joueur gagne, il empoche deux fois la mise et arrête de jouer.
- Si le joueur perd, le casino empoche la mise et le joueur retente sa chance en doublant sa mise précédente.

1. Quelle est l'espérance du gain du joueur ?
2. Le casino interdit de miser plus de mille fois la mise initiale. Quelle est l'espérance du gain du joueur ?