

TD 4 : Indépendance

Exercice 1. On suppose que dans un restaurant universitaire on propose deux desserts à chaque repas. La probabilité que l'un des deux soit un yaourt est 0,4, une orange 0,8. La probabilité que les deux soient un yaourt et une orange est 0,3. Calculer la probabilité que l'on propose :

- un yaourt et pas d'orange ?
- une orange et pas de yaourt ?
- ni yaourt ni orange ?

Exercice 2. Dans votre ferme, vous avez 4 canards et 6 canes, ainsi que 6 truies et n cochons. Combien vaut n si les évènements "*être une femelle*" et "*être une volaille*" sont indépendants ?

Exercice 3. Vous lancez deux dés. Les évènements "*avoir au moins un 6*" et "*la somme est 7*" sont-ils indépendants ?

Exercice 4.

1. Soient A et B deux évènements indépendants sur un espace de probabilité Ω .
 - Montrer que les évènements \bar{A} et B sont indépendants.
 - De même montrer que \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.
2. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes sur l'espace Ω .
 - Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
 - Montrer que pour deux ensembles quelconques $E = \{x_1, \dots, x_k\}, F = \{y_1, \dots, y_l\}$ on a l'égalité $\mathbb{P}[X \in E, Y \in F] = \mathbb{P}[X \in E] \cdot \mathbb{P}[Y \in F]$. En déduire la probabilité de l'évènement " $X \in E$ ou $Y \in F$ ".
 - Montrer que si f est une fonction quelconque et que l'on note $Z = f(Y)$ alors les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Exercice 5. Soit A, B, C des évènements.

1. On suppose que A, B sont indépendants, A, C aussi et B, C de même. A-t-on A, B, C indépendants, i.e. $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B] \cdot \mathbb{P}[C]$? Si oui, le prouver. Sinon, exhiber un contre-exemple.
2. On suppose que A est indépendant avec B et avec C . A t'on toujours A indépendant avec $B \cup C$? Si oui, le prouver. Sinon, donnez une condition suffisante non triviale et prouver l'indépendance en supposant cette condition.

Exercice 6. On considère le jeu qui consiste à lancer simultanément 2 dés. À cette expérience, on associe la variable aléatoire X qui correspond à la somme des valeurs indiquées par les dés.

- Calculez l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ pour une partie, puis pour n parties,
- De même, calculez la variance pour une partie, puis pour n parties.

Exercice 7. On fait deux "pile ou face" successifs. Au premier lancer, on gagne 1 si on fait pile, rien si on fait face. Au deuxième, on gagne 2 si on fait pile, rien sinon.

1. Quelles sont l'espérance et la variance du gain.
2. On généralise à n lancers : si on obtient pile au i -ème lancer, on gagne i , sinon rien ne se passe (aucun gain, aucune perte). Quelles sont l'espérance et la variance du gain de n lancers ?

Exercice 8. On jette deux dés et on note respectivement X, Y les variables aléatoires correspondantes à chaque dé. Soit $Z = \max(X, Y)$. Déterminer la loi de Z , puis calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $Var(Z)$.

TD 4 : Indépendance

Exercice 9. Pour vous détendre après le devoir, vous allez vous promener à la réserve écologique des barails. L'absence d'entretien ne vous permet pas de voir où vous mettez les pieds. A chaque pas, vous avez une probabilité de $\frac{1}{2}$ de croiser un animal étrange. Si vous rencontrez un animal, il peut s'agir :

- soit d'un *Saquedeneu* avec une probabilité de $\frac{3}{10}$,
- soit d'un *Akwakwak* avec probabilité de $\frac{1}{2}$,
- soit d'un *Zarbi*.

Les pas sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité de croiser un *Zarbi* en un pas ?
2. Vous faites 4 pas. Quel est l'univers des possibilités ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir croisé au moins un *Akwakwak* durant ces 4 pas ?
4. Il y a 28 types de *Zarbi*, chacun ayant la forme d'une lettre de l'alphabet (ou des caractères ? et !). La distribution des types est uniforme. Montrer que la probabilité de croiser un *Zarbi* ayant la forme d'un "F" en 4 pas est de $1 - \left(\frac{279}{280}\right)^4$.
5. Vous faites 1000 pas. Quelle est l'espérance du nombre de *Saquedeneu* que vous croiserez ?

Exercice 10. Au casino, une machine à sous fonctionne de la manière suivante : on introduit une pièce de 2 euros et trois roues tournent ; chaque roue s'arrête sur un chiffre de 0 à 9 aléatoirement. Si les trois chiffres sont différents, le joueur perd sa mise, s'il y a un "double", celui-ci gagne 4 euros et enfin s'il obtient un "triple", il gagne x euros.

- Calculer l'espérance mathématique, en fonction de x , du gain pour le joueur.
- De même calculer la variance.
- En déduire la valeur limite de x pour laquelle le jeu est favorable à la banque.