

TD 6 : Probabilités continues

Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, i.e. le plus grand entier inférieur ou égal à x . Par exemple, $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ et $\lfloor 3 \rfloor = 3$. Calculer $\int_a^b \lfloor x \rfloor dx$ pour $a < b$ deux entiers.

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 (x+3)dx & I_2 &= \int_2^5 (x^2 + \frac{1}{x^3})dx & I_3 &= \int_1^3 (\sqrt{x})dx \\ I_4 &= \int_0^2 |x^2 - 1|dx & I_5 &= \int_0^1 (x+8)^2 dx & I_6 &= \int_0^2 (2x^4 + 4x^3 + x + 3)dx \\ I_7 &= \int_0^1 (x^2 - 3)^7 dx & I_8 &= \int_0^4 x^4 \cdot e^{5x^5} dx & I_9 &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-3x} dx \end{aligned}$$

Exercice 3. La densité f de la variable aléatoire X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ a & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ -ax + 4a & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f et calculer la constante a .
2. Calculer $\mathbb{P}(|X - 1,5| \leq 1)$ et $\mathbb{P}(X \geq 3)$.

Exercice 4. Soit la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Calculer $\int_{-3}^{-1} g$, $\int_{-1}^0 g$, $\int_0^1 g$, $\int_{-2}^5 g$. Vérifier vos résultats à l'aide de calculs d'aires.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire admettant une densité f et $a > 0$. Montrer que $Y = a \cdot X$ admet pour densité $g(x) = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{x}{a}\right)$.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. On pose $Y = -2 \ln(1 - X)$.

1. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}[X \leq a]$ suivant les valeurs de a .
2. Quelles valeurs peut prendre Y ?
3. Calculer $\mathbb{P}[Y \leq t]$ en fonction de t .
4. Soit h la fonction de densité de Y . Calculer h .

Exercice 7. Vous préparez un grand bol de thé. Soit X la variable aléatoire correspondant à votre consommation en L durant la journée. On suppose que X est de densité $f(x) = c(1 - x)^4$ pour $x \in [0; 1]$, 0 sinon.

1. Combien vaut c ?

TD 6 : Probabilités continues

2. Combien doit-on préparer de thé afin que la probabilité de tout finir dans la journée soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 8. On prend le segment $[0; 1]$ sur lequel on place X , un point choisi avec un tirage aléatoire uniforme.

1. Soit $a \in [0; 1]$, calculer $\mathbb{P}[X \leq a]$.
2. Le point X coupe le segment $[0; 1]$ en deux parties, ayant chacune une longueur. Soit R le ratio de la longueur la plus petite sur la longueur la plus grande. Par exemple, si $X = 0.5$, alors $R = 1$. Calculer $\mathbb{P}[R \leq a]$, pour $a \in [0; 1]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[R]$.

Indication. Pour une constante C , $\frac{x}{x+C} = \frac{x+C}{x+C} - \frac{C}{x+C} = 1 - \frac{C}{x+C}$.