

GRAPHES UNIVERSELS ET SCHÉMAS D'ÉTIQUETAGE

Amaury Jacques

Directeur : Cyril Gavoille

Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, LaBRI, UMR 5800, F-33400 Talence, France

L'algorithmique distribuée est un large champ de recherche de l'informatique théorique actuelle. Contrairement aux modèles traditionnels de calculs, centralisés, l'algorithmique distribuée nécessite le partage d'information entre les différents agents qui effectuent chacun des calculs. Ces contraintes particulières amènent la nécessité de développer de nouvelles structures de données. Dans ce contexte, les schémas d'étiquetages sont des structures de données distribuées permettant répondre à des questions telles que « Est-ce que les sommets étiquetés ℓ_1 et ℓ_2 sont adjacents ? » sur des graphes tout en minimisant l'information stockée localement. Ces questions motivent la recherche sur les graphes universels qui sont étroitement liés aux schémas d'étiquetage.

Introduction

Schémas d'étiquetage d'adjacence

Un schéma d'étiquetage d'adjacence pour une famille de graphes \mathcal{F} est une manière d'assigner des étiquettes aux sommets de chaque graphe de \mathcal{F} de sorte que, avec comme unique information les étiquettes de deux sommets de n'importe quel graphe de \mathcal{F} , il soit possible, avec une fonction de décodage, de déterminer si ces deux sommets sont adjacents ou non. C'est une manière distribuée de représenter un graphe.

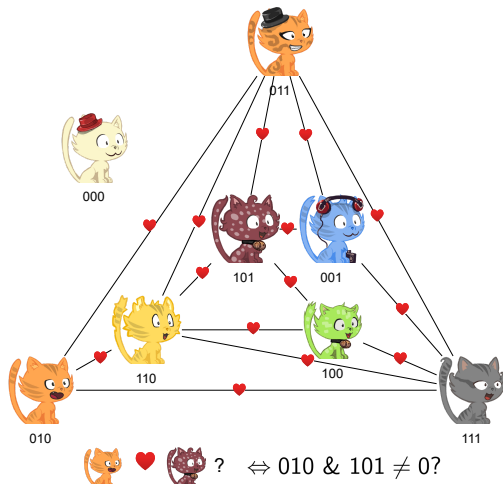


FIGURE 1.1 – Un graphe étiqueté et sa fonction de décodage.
chats sous licence – David Revoy – CC-BY 4.0

Grappe universel induit

Un graphe universel induit (GUI) pour une famille \mathcal{F} donnée est un graphe U tel que chaque de \mathcal{F} apparaisse comme un sous-graphe induit de U . Le nombre

minimum de sommets nécessaires au graphe universel pour une famille \mathcal{F} est noté $\mathcal{U}(\mathcal{F})$.

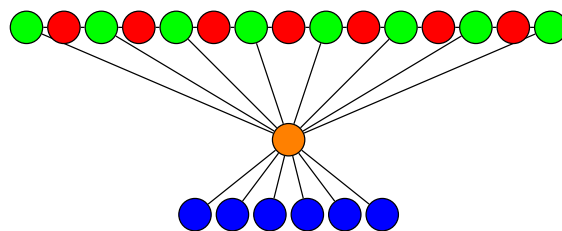


FIGURE 1.2 – Grappe universel induit optimal pour le chemin et l'étoile chacun de 15 sommets.

Équivalences

Les notions de schéma d'étiquetage d'adjacence et de graphe universel induit sont équivalentes. S'il existe pour une famille \mathcal{F} un graphe universel induit U alors il existe un schéma d'étiquetage d'adjacence pour \mathcal{F} avec des étiquettes d'au plus $\lceil \log_2 |V(U)| \rceil$ bits, et réciproquement. Cette équivalence est une des motivations à l'étude des graphes universels induits pour différentes familles de graphes.

Le problème de graphe universel induit est également grandement liés à d'autres problèmes classiques de la théorie de la complexité. Ainsi, réduit à des familles de deux graphes il est équivalent au problème du sous-graphe induit commun maximum ou du supergraphe commun minimum et le problème de sous-graphe induit peut y être réduit. Graphe universel induit de taille au plus k est donc un problème NP-complet.

Si on s'intéresse aux bornes relatives au cas général pour nombre de sommets nécessaire à un graphe universel induit, des liens avec la théorie de Ramsey apparaissent. Le nombre de Ramsey $R(s)$, décrit le

nombre de sommets à partir duquel tout graphe possède un stable ou une clique de au moins s sommets. Si pour deux graphes à n sommets, le pire cas est une famille contenant la clique et le stable nécessitant $2n - 1$ sommets pour les contenir, pour trois graphes si on prend s tel que $n = R(s) - 1$ alors la pire famille nécessite au moins $3n - 2s + 1 = 3n - \Theta(\log n)$ sommets pour le plus petit graphe universel induit la contenant [1].

Familles de graphes peu denses

La question de minimiser le nombre sommets du graphe universel induit pour différentes familles a été très largement étudiée depuis plusieurs décennies. Si pour les graphes planaires, l'existence d'un GUI de taille linéaire reste complètement ouverte, il a été montré que pour la famille des arbres un GUI de taille $O(n)$ existait [3].

Très peu nombreuses sont les familles où la borne exacte est connue, ainsi pour l'union de chemins $\mathcal{U}(\mathcal{F}) = 3n/2 + O(1)$ [2] et pour l'union de cliques $\mathcal{U}(\mathcal{F}) = n \ln(n + 1) - n + O(1)$ [1]. Mêmes pour des familles aussi élémentaires que l'union de cycle, $11n/6 \leq \mathcal{U}(\mathcal{F}) \leq 2n$ [2], ou les caterpillars, $3n/2 \leq \mathcal{U}(\mathcal{F}) \leq 8n$ [4] les valeurs exactes sont encore à découvrir.

Pour ces familles, les bornes inférieures connues sont principalement basées sur des méthodes *ad-hoc* spécifiques basées sur l'incompatibilité de deux ou trois graphes.

Résultats

Bornes supérieures

Nous proposons une construction se basant sur la mise en commun de stables entre les différents graphes d'une famille. Celle-ci montre les limites des méthodes *ad-hoc* pour améliorer les bornes inférieures actuelles. En effet, notre construction prouve par exemple que pour toute famille de trois arbres, il existe un graphe universel de $3n/2 + O(\log n)$ sommets, montrant ainsi que toute amélioration de la borne inférieure se basant sur une méthode *ad-hoc* pour les caterpillar nécessite une sous-famille d'au moins quatre graphes. Jusqu'à présent aucune preuve de ce type n'a été effectuée avec plus de deux graphes ayant peu de symétries.

Au delà d'application avec de petites familles de graphes, l'asymptotique de la construction abouti à la formule suivante pour une famille de t graphes de petite pathwidth :

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}) \leq (2 + \epsilon)\sqrt{t} \cdot n$$

pour $\epsilon > 0$.

Nous conjecturons qu'il existe une constante c tel que $\mathcal{U}(\mathcal{F}) \leq c \cdot \sqrt{t} \cdot n$ pour toutes les familles de t graphes quelconques.

Bornes inférieures

À l'aide d'une technique basée sur la théorie de l'information, nous montrons de nouvelles bornes inférieures pour différentes familles de graphes à n sommets.

L'idée de la preuve étant qu'un graphe universel induit pour une famille de graphes à n sommets possède $c \cdot n$ sommets, il contient donc au plus $\binom{cn}{n}$ sous-graphes induits de taille n . Ce nombre doit être bien sûr plus grand que le nombre de graphes compris dans la famille.

\mathcal{F}	c
forêts	1.626
planaires-extérieurs	3.275
planaires	10.520
sans mineur $K_{3,3}$	10.521

TABLE 1.1 – Bornes inférieures pour différentes familles \mathcal{F} à n sommets de la forme $\mathcal{U}(\mathcal{F}_n) \geq cn - o(n)$, où c est solution de l'équation $g = c^c / (c - 1)^{c-1}$ et g la constante de croissance de la famille.

Ces résultats améliorent de manière significative les précédentes bornes connues.

Bibliographie

- [1] Cyril Gavoille and Amaury Jacques. Lower bounds for Universal Graphs, 2025+. In preparation.
- [2] Mikkel Abrahansen, Stephen Alstrup, Jacob Holm, Mathias Bæk Tejs Knudsen, and Morten Stöckel. Near-Optimal Induced Universal Graphs for Cycles and Paths. *Discrete Applied Mathematics*, 282 :1-13, August 2020.
- [3] Stephen Alstrup, Søren Dahlgaard, and Mathias Bæk Tejs Knudsen. Optimal induced universal graphs and adjacency labeling for trees. *Journal of the ACM*, 64(4) :Article No. 27, pp. 1-22, August 2017.
- [4] Cyril Gavoille and Arnaud Labourel. Smaller universal graphs for caterpillars and graphs of bounded path-width. In *11th International Colloquium on Graph Theory (ICGT)*, page Paper No. 54, July 2022.