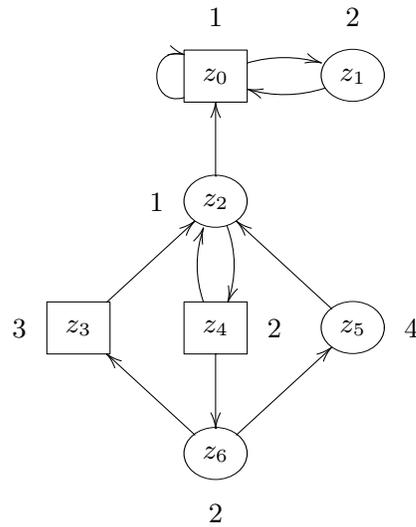


*Question 1*

Calculez les sommets gagnants du jeu de parité suivant, en appliquant l'algorithme de Zielonka. Indiquez également des stratégies gagnantes positionnelles pour chaque joueur.



*Question 2*

On considère les 2 variantes suivantes du jeu de parité. On supposera, comme d'habitude, que l'arène  $\mathcal{A} = (V = V_0 \cup V_1, E, \chi)$  est finie, et que chaque sommet a au moins un successeur.

1. Soit  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Dans le jeu  $\mathcal{G}_n$ , le joueur  $P_0$  joue les  $n$  premiers coups de n'importe quelle partie (même si un sommet appartient à  $P_1$ ). A partir du  $(n + 1)$ -ème coup, le joueur  $P_i$  joue seulement dans les sommets de  $V_i$ .
2. Dans le jeu  $\mathcal{G}'$ , dans chaque partie, le joueur  $P_0$  a le droit de jouer au plus un coup à la place de  $P_1$ .

Pour les deux variantes, le joueur  $P_0$  gagne une partie infinie  $v_0, v_1, \dots$  si  $\max\{\chi(v) : \exists^\infty n : v = v_n\}$  est pair.

Vous pouvez supposer qu'il existe un algorithme qui détermine quel joueur gagne à partir d'un sommet donné dans un jeu de parité.

- Proposez un algorithme qui détermine les sommets gagnants de  $P_0$  dans le jeu  $\mathcal{G}_n$ .
- Pour la variante  $\mathcal{G}'$  on demande de décrire une réduction vers un jeu de parité usuel : à partir de  $\mathcal{A}$  vous allez construire une arène  $\mathcal{A}' = (V' = V'_0 \cup V'_1, E', \chi')$  et une fonction  $f : V \rightarrow V'$  tels que  $v$  est gagnant pour  $P_0$  dans  $\mathcal{G}'$  ssi  $f(v)$  est gagnant pour  $P_0$  dans le jeu de parité sur  $\mathcal{A}'$ .
- Est-ce que  $P_0$  peut avoir une stratégie gagnante positionnelle dans le jeu  $\mathcal{G}_n$  ? Même question pour  $\mathcal{G}'$ . Justifiez votre réponse, soit en montrant qu'une stratégie positionnelle existe, ou par un contre-exemple.

### Question 3

Le jeu qui suit est décrit par une arène finie  $\mathcal{A} = (V = V_0 \cup V_1, E)$  et deux ensembles  $Q, R \subseteq V$  de sommets. On suppose de nouveau que chaque sommet a au moins un successeur. Le joueur  $P_0$  gagne une partie infinie  $v_0, v_1, \dots$  si pour tout  $n \geq 0$  : si  $v_n \in Q$  alors il existe  $m > n$  tel que  $v_m \in R$ .

1. Décrivez une réduction vers un jeu de parité  $\mathcal{A}' = (V' = V'_0 \cup V'_1, E', \chi)$ .  
*Indication* : Deux couleurs et un bit de mémoire suffisent.
2. (Question bonus) Reformulez la condition de victoire du jeu sur  $\mathcal{A}'$  en condition de Büchi.