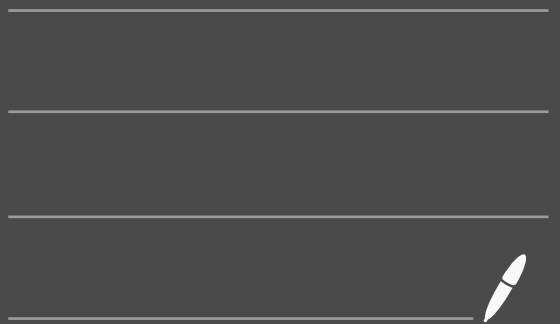


ω - automata, Büchi games



Aujourd'hui : jeux infinitaires -
Düchi, parity

Jeux finitaires : Reach, Safety, obligations,
↓
weak parity
états visités au cours d'une partie

Infinitaires : on parle de nb. infini
de visites

Ex Conditions d'équité (en vérification)

par exemple :- une ressource demandée
sera acquise

- chaque fois qu'une ressource
est demandée, elle sera acquise
plus tard → propriété non-
rythmée

- approximation (équité forte)

une ressource demandée ω -souvent
sera acquise ω -souvent

\leadsto propriétés ω -régulières

$\hat{=}$ propriétés sur des séquences
infinies (ω -words) à l'aide
d'automates finis

Les 2 prochains cours : jeux avec
condition de victoire exprimée par
un ω -régulier

\rightarrow jeux de parité $\hat{=}$

jeux qui sont la forme la
plus générale des jeux
 ω -réguliers

Mots infinis

A alphabet, mot infini $w = a_0 a_1 \dots$

$A^\omega =$ ensemble des mots infinis $f: \mathbb{N} \rightarrow A$

$L \subseteq A^\omega$ langage de mots infinis

Ex $A = \{a, b\}$

$\text{Inf}(a) = (b^* a)^\omega$ (mots w
tq. $|w|_a = \infty$)

$A^\omega \setminus \text{Inf}(a) = \text{Fin}(a) = (a+b)^* b^\omega$

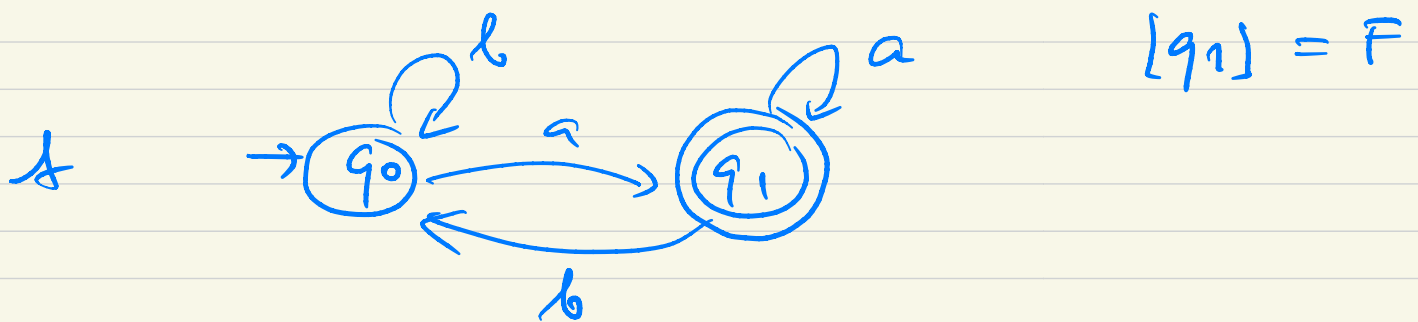
Automates de Büchi :

$A = (Q, A, \delta, q_0, F)$
 $\delta \subseteq Q \times A \times Q$

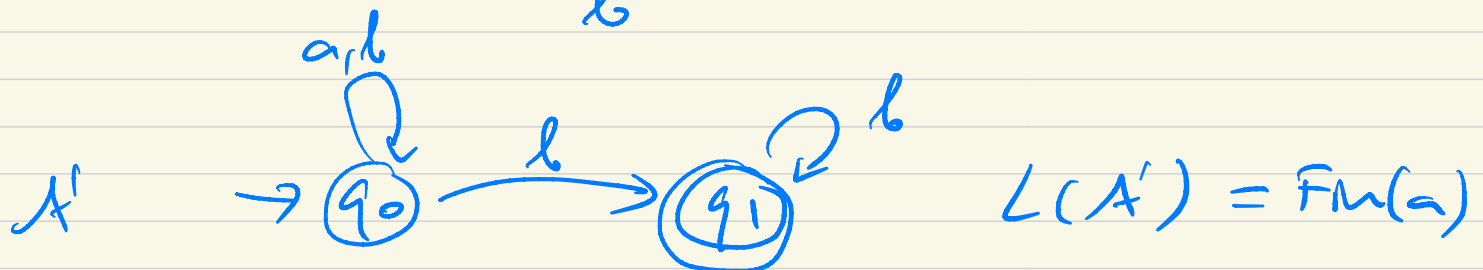
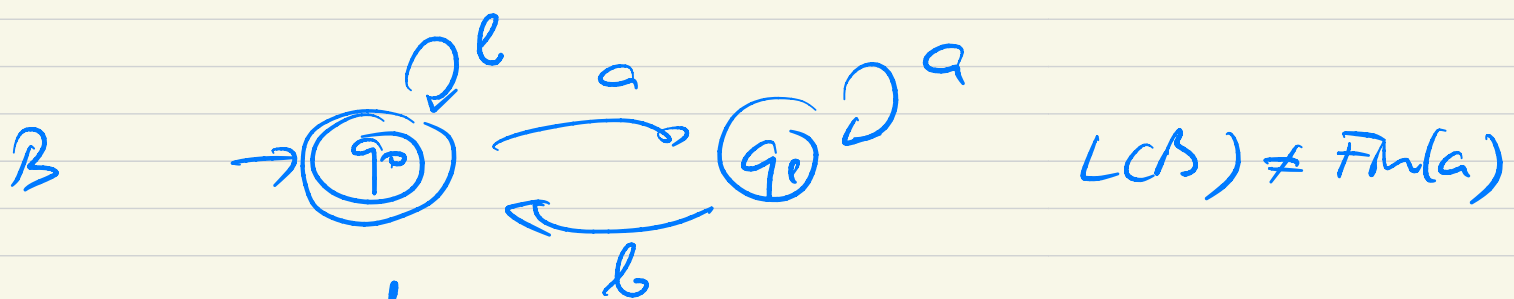
$f: q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots$ acceptant
 $\Leftrightarrow \exists^\infty n : q_n \in F$

$L(A) = \{ w \in A^\omega \mid \exists f \text{ acc. sur } w \}$

$\text{Inf}(a)$ est ω -régulier :



$$L(A) = \text{Inf}(a)$$



il n'existe pas d'automate de Büchi déterministe qui acc. $\text{FM}(a)$

Def L est w -régulier si $L = L(A)$,
 A aut. de Büchi (non-dét.)

Rq 1) Si L est w -régulier, alors
 $A^c \setminus L$ est w -régulier.

2) Pour déterminer aut. de Büchi :
→ automates de partie

$$A = (Q, A, q_0, \delta, p : Q \rightarrow \{0, \dots, k\})$$

$$p(q) = \text{priorité de } q \in Q$$

$$\delta : Q \times A \rightarrow Q \quad \text{dét.}$$

$q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots$ est acceptante

si $\max \{c \mid \exists^\infty n : p(q_n) = c\}$

est paire

Jeux de parité

Arène (V_0, V_1, E) $E \subseteq V \times V$

Fct. de priorité

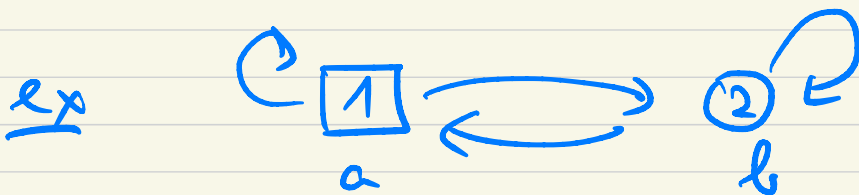
$$p: V \rightarrow \{0, \dots, K\}$$

Rq On suppose que chaque sommet a au moins 1 successeur

→ parties maximales typ. infinies

Une partie $\pi: v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$

est gagnée par P_0 si la priorité maximale visitée ∞ -souvent dans π est paire.



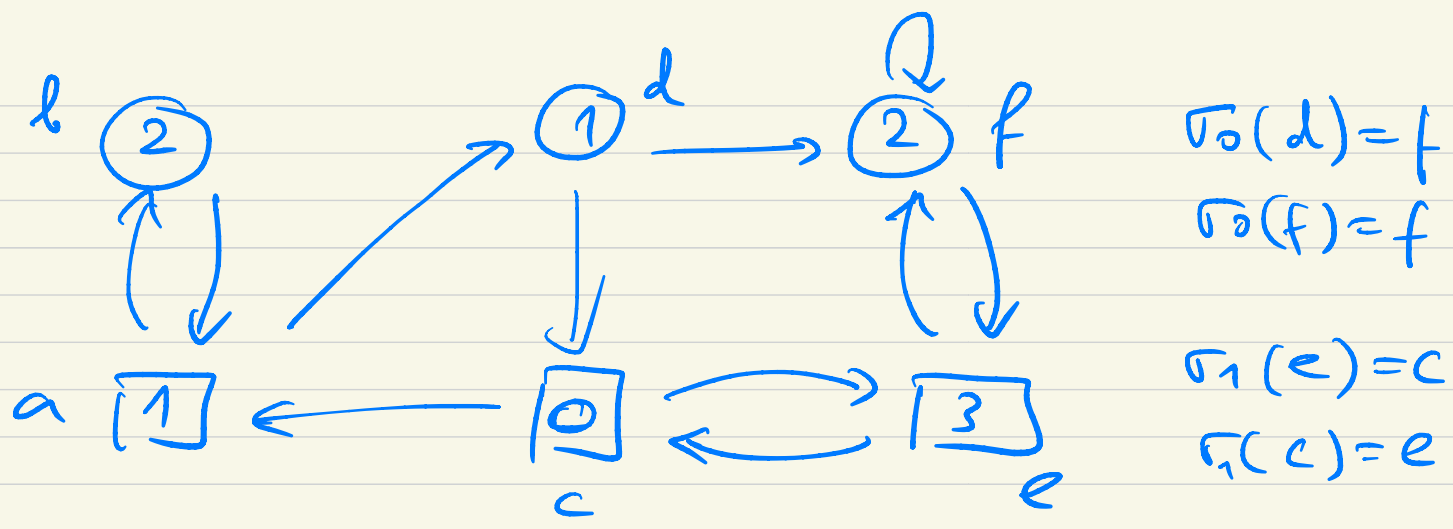
$$p(a) = 1$$
$$p(b) = 2$$

$\pi: b \rightarrow b \rightarrow b$

prio. max = 2
 ∞ -souvent = 2

$\pi': b \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow \dots$

2
 ∞ 1



$p(a) = 1, p(b) = 2, \dots$

d, f components pour P_0 : P_0 reste dense f

c, e composants pour P_1 : P_1 va cycle entre c, e

a, b composants pour P_0 : tout

P_1 fait $a \rightarrow b$, ou $a \rightarrow d$
 $(\rightarrow f)$

$W_0 = \{ a, b, d, f \}$

$W_1 = \{ c, e \}$

Cas spécial : $\kappa = 1$

→ 2 priorités : 1 et 2

$\pi : v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$

π est gagnée par $P_0 \iff$

priorité max. visitée ∞ -souvent = 2

$\iff \pi$ passé ∞ -souvent par

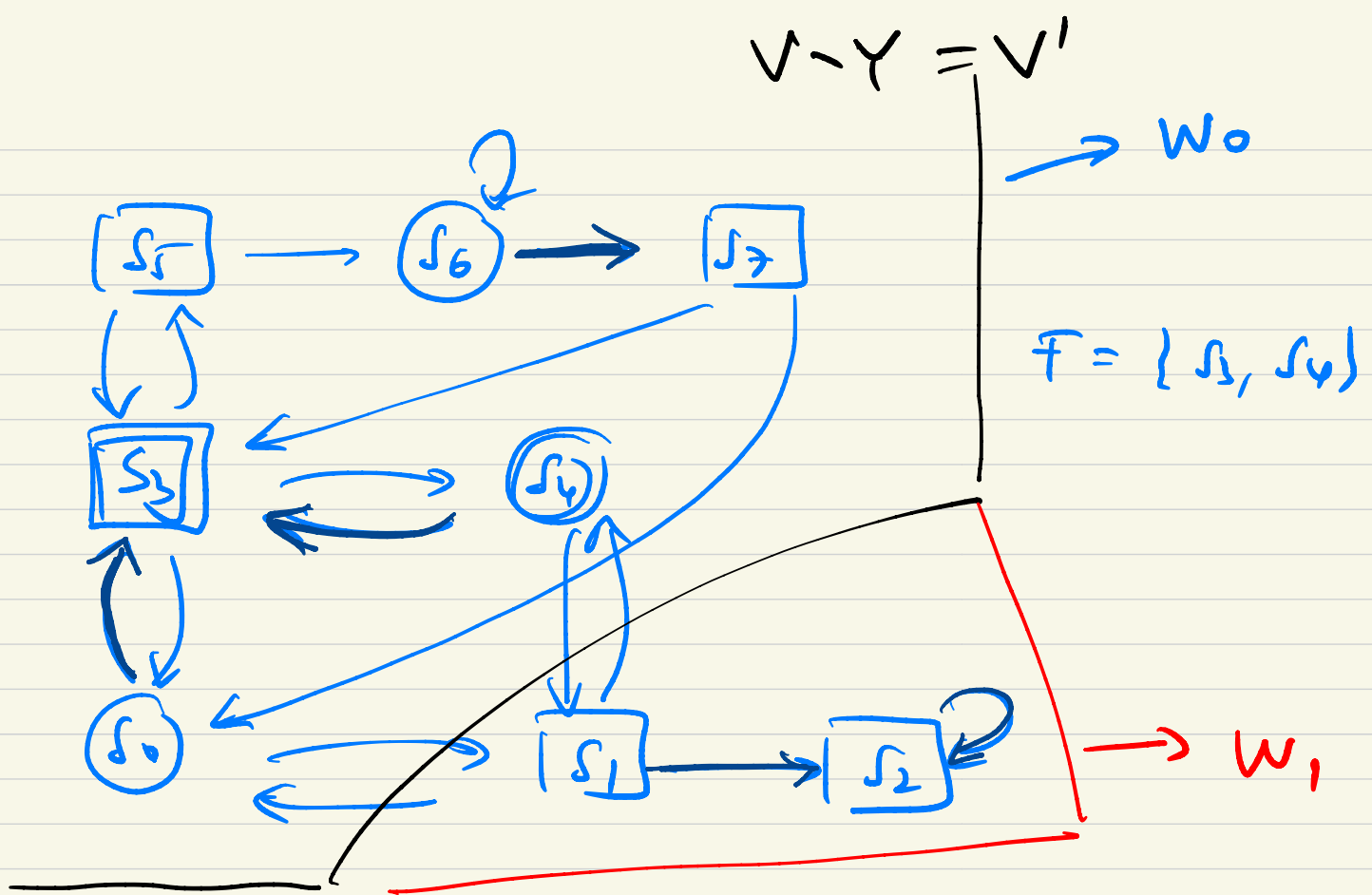
$F := \{v : p(v) = 2\}$

Jeux d'accessibilité répétée
= jeux de Büchi

- P_0 gagne π si π passe par F
 ∞ -souvent, et (Büchi)

- P_1 gagne π si π passe par F
finitement souvent (co-Büchi)

$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \mid \underbrace{v_n \rightarrow \dots}_{\neq F}$



$$\text{Attr}_0(s_3, s_4) = \{s_3, s_4, s_0, s_7, s_6, s_5\}$$

$$X = V \setminus \text{Attr}_0(s_3, s_4) = \{s_1, s_2\}$$

$$Y = \text{Attr}_1(X) = \{s_1, s_2\}$$

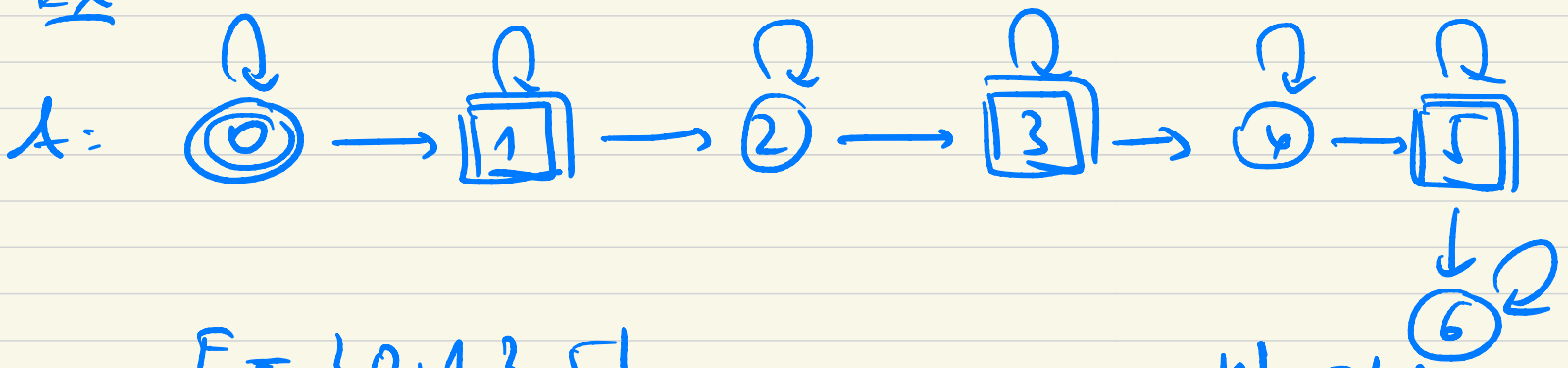
Büchi sur l'arène induite par $V \setminus Y$

$$X' = \emptyset$$

sur l'arène induite par V' ,
tout est gagnant pour $P_0 \rightarrow$

$$W'_0 = V'$$

Ex



$$F = \{0, 1, 3, 5\}$$

$$W_0 = \{0\}$$

$$X^{(1)} = \{6\}, \quad Y^{(1)} = \{5, 6\}$$

$$\uparrow W_1 = V - \{0\}$$

$$A^{(1)} = A - \{5, 6\}$$

$$W_0^{(1)} = \{0\}$$

$$X^{(2)} = \{4\}, \quad Y^{(2)} = \{3, 4\}$$

$$W_1^{(1)} = \{1, \dots, 4\}$$

$$A^{(2)} = A^{(1)} - \{3, 4\}$$

$$W_0^{(2)} = \{0\}$$

$$X^{(3)} = \{2\}, \quad Y^{(3)} = \{1, 2\}$$

$$W_1^{(2)} = \{1, 2\}$$

$$A^{(3)} = A^{(2)} - \{1, 2\}$$

$$W_0^{(3)} = \{0\}, \quad W_1^{(3)} = \emptyset$$

Th Bñdi calcule correctement les régions gagnantes.

On le montre par récurrence.

Si $V = \emptyset$ alors $W_0 = W_1 = \emptyset$

Si non :

- si $X = \emptyset = V \setminus \text{Attr}_0(F) \Rightarrow$

$\forall v \in V : v \in \text{Attr}_0(F)$

Donc si P_0 joue la stratégie d'attraction : elle est toujours capable d'arriver dans F , à partir de n'importe quel sommet.

$\Rightarrow P_0$ garantit de cette façon de visiter F ∞ - souvent

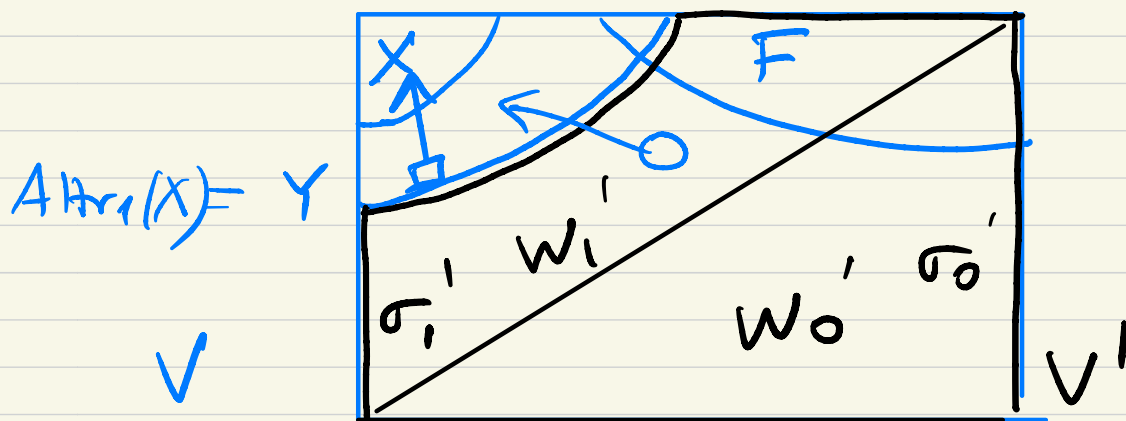
- si $X \neq \emptyset$: appel réc.
Bñdi (V, ψ)

Par récurrence, l'appel réc. Back ($V \setminus Y$)

calcule les régions gagnantes W_0', W_1'
sur la sous-arène $V \setminus Y$, et

$V \setminus Y = W_0' \cup W_1'$ (jeu est dit.)

Stratégies gagnantes σ_0', σ_1' de
 P_0 , resp. P_1 , sur W_0', W_1' .



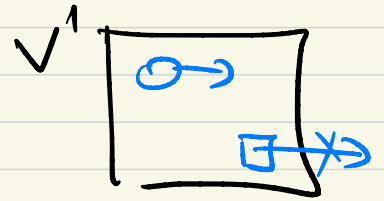
$$W_0 = W_0' \quad , \quad \underline{W_1 = W_1' \cup Y}$$

sur W_1 : dans Y , P_1 gagne avec
la stratégie d'attraction qui le mène
vers X . Dès que le jeu arrive
dans X , P_1 joue la stratégie de piège
pour y rester.

Dans W_1' , P_1 joue σ_1' . Si le jeu reste dans W_1' , ça sera gagné par P_1 (récurrence). Si le jeu va dans Y (à cause de P_0), P_1 va jouer la stratégie sur Y , et gagner.

$$\Rightarrow \boxed{Y \cup W_1' \subseteq W_1}$$

$$\boxed{W_0' \subseteq W_0}$$

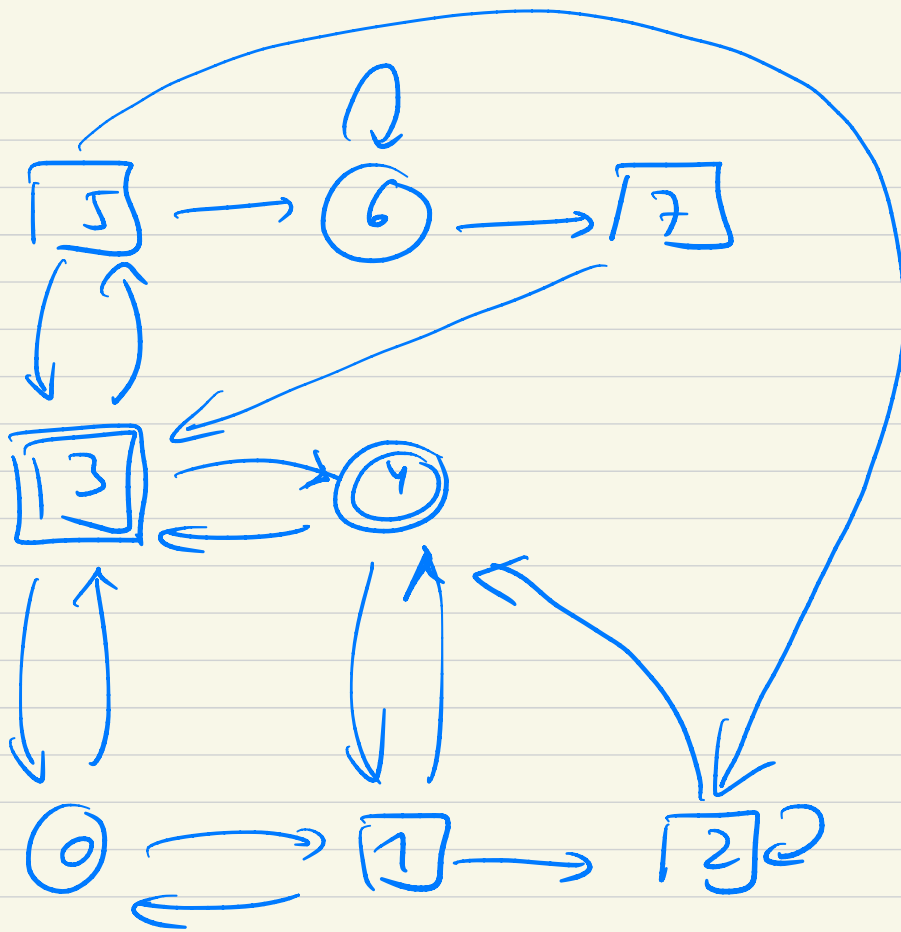


car $V - Y$ est piège pour P_1

Donc, en appliquant σ_0' , P_0 gagne sur $W_0' = W_0$.

En particulier, on a :

- $V \subseteq W_0 \cup W_1$ (jeu déterminé)
- strat. positionnelles :
 - σ_0' pour P_0 , σ_1' / attracteur pour P_1



$$X = V \setminus \text{Altra}(3,4) = V \setminus \{3,4,6,7,0\}$$

$$= \{1,2,5\}$$

$$Y = \text{Altra}(\{1,2,5\}) = \{1,2,5,3,0,7\}$$

$$V' = \{4,6\}$$

$$\text{Altra}(Y) = \{4\}, \quad X' = \{6\} = Y'$$

$$w_0' = \emptyset, \quad w_1' = \{4,6\}$$

$$w_0 = \emptyset, \quad w_1 = V$$

2. Solution

$\text{Attr}_0^+(F)$

attracteur strict de P_0
vers \overline{F}

= ens. des sommets à partir desquels
 P_0 peut garantir d'arriver dans

F en 1 ou plus coups → donc le
premier sommet ne compte pas!

On calcule des ensembles décroissants:

$$\begin{cases} X_0 := V \\ X_{n+1} := \text{Attr}_0^+(F \cap X_n) \end{cases}$$

$$X_1 \subseteq X_0$$

$$X_2 \subseteq X_1$$

⋮

$$\begin{cases} X_2 = \text{Attr}_0^+(F \cap X_1) \\ X_1 = \text{Attr}_0^+(F \cap X_0) \end{cases}$$

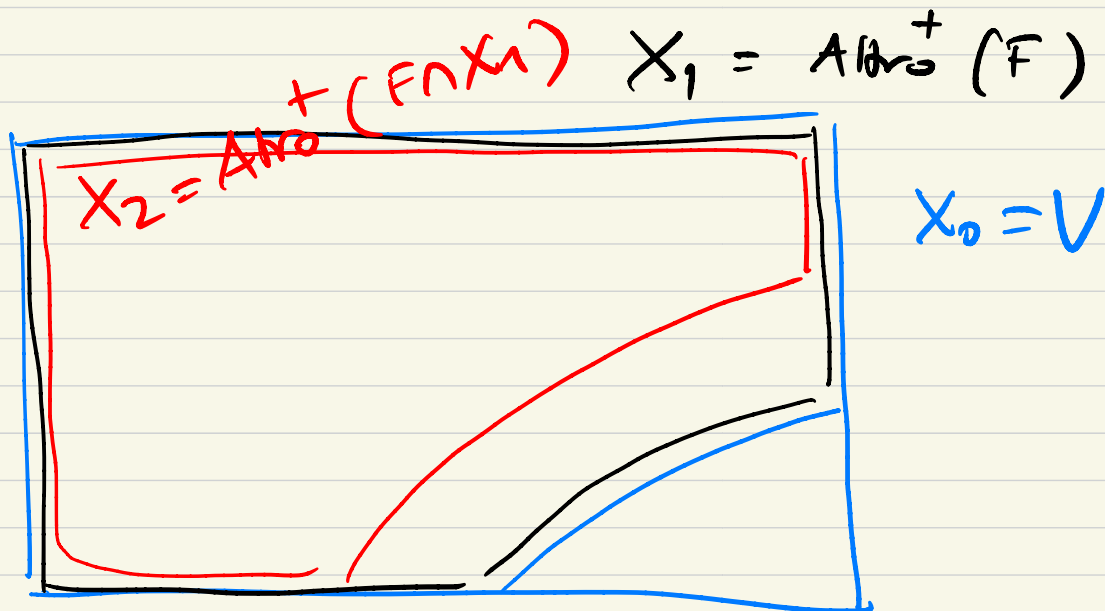
$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n = X_{n+1}$$

$$X := \bigcap_{n \geq 0} X_n = X$$

$$\Rightarrow X \in W_0$$

il reste à montrer : $V \setminus X \in W_1$

$$X = X_n = X_{n+1} = \text{Alt}_0^+(F \cap X_n)$$



On peut montrer par induction sur $k \geq 0$:

$v \in X_k \Leftrightarrow$ à partir de v

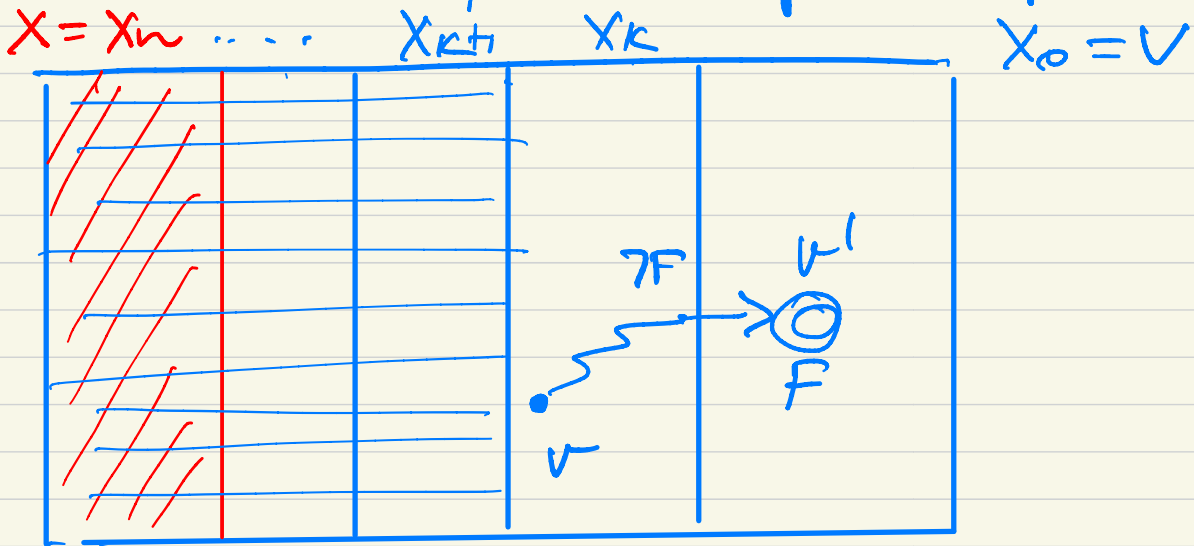
P_0 peut garantir de visiter F

au moins k fois (sans compter v)

$\forall K:$

$$v \notin X_{K+1} = \text{Attr}_0^+(X_K \cap F)$$

$\Leftrightarrow P_1$ a stratégie pour éviter $X_K \cap F$ en 1 ou plus coups, à partir de v

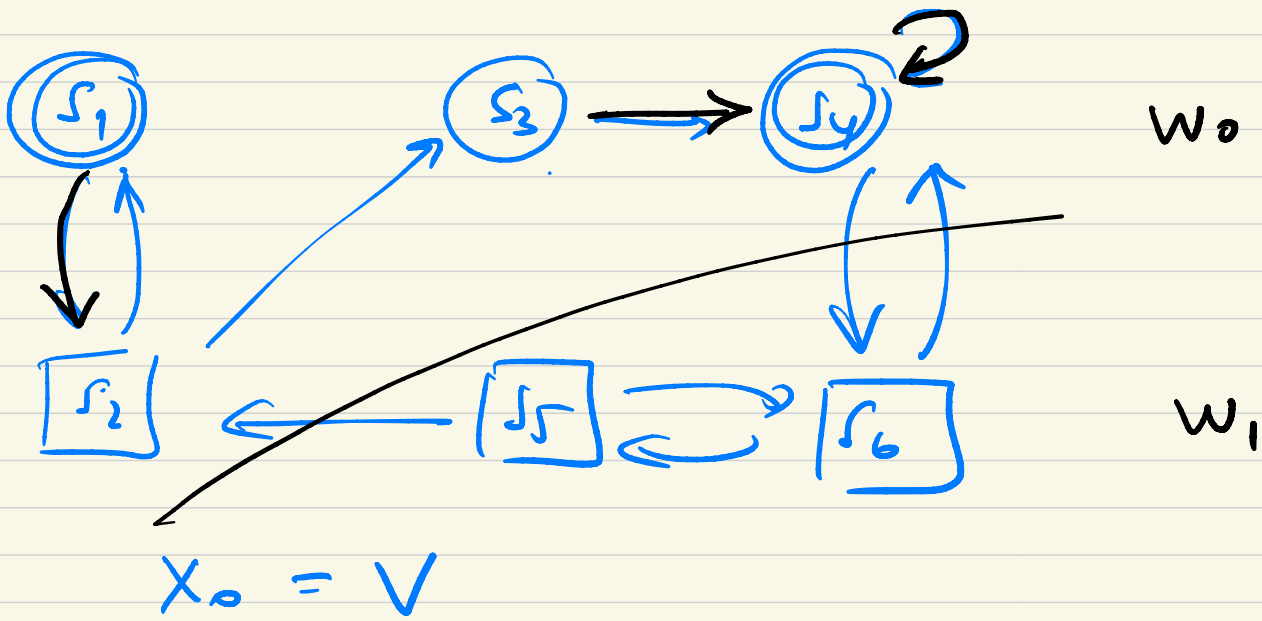


P_1 joue cette stratégie : si une partie arrive dans $v' \in F$ alors $v' \notin X_K$

Par induction : à partir de v' , P_1 a stratégie pour visiter $F < K$ fois

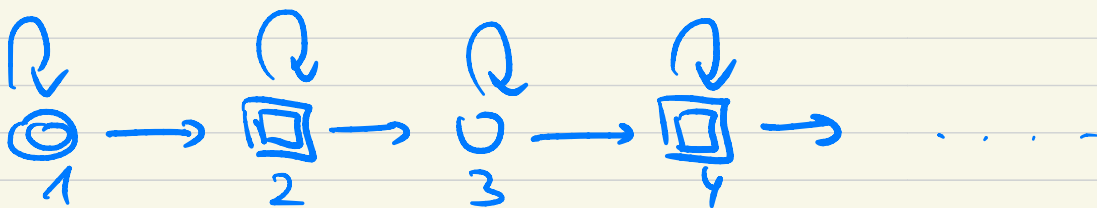
\Rightarrow à partir de v , P_1 a stratégie pour visiter $F < K+1$ fois

Ex



$$X_1 = \{s_3, s_4, s_1, s_2\} = X_2$$

Ex (jeu infini)



$$\text{Alt}_0^+(F) = V$$

$$\Rightarrow w_0 = V, \quad w_1 = \emptyset$$