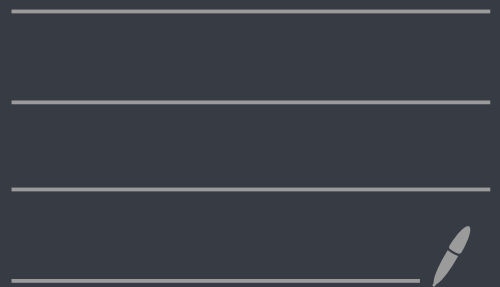


Nash : complexity



Dernier cours (lemme) :

$m = (m_i)_{i=1}^n$ est éq. de Nash

si $\forall i \forall s_i \in S_i$:

$$p_i(s_i, m_{-i}) \leq p_i(m_i, m_{-i})$$

+ égalité pour $s_i \in \text{supp}(m_i)$.

Toute stratégie pure de l'équilibre m est une "best answer".

1) Conséquence pour les jeux à 2 joueurs :

Si on connaît le support de m
disons avec $|\text{supp}(m_i)| = k_i$,
alors on peut obtenir pour chaque
 i un système d'équations linéaires
à k_i inconnues :

$$\sum_{s_i \in \text{supp}(m_i)} m_i(s_i) = 1 \quad + \dots$$

$(k_i - 1)$ eqs
 k_i

Ce système peut être résolu en
temps polynomial dans \mathbb{Q} .

→ algorithme NP pour 2 joueurs

2) On peut vérifier si $m = (m_i)_i$ donné est un NE.

Q: Peut-on décider $m = (m_i)_i$ en PTIME? Pas forcément:

↓ Il existe des jeux sans NE dans \mathbb{Q} .

Ex $n > 2$ $a > d, b > c$

	tous les autres ignorent	au moins un autre aide
aider	a	c
ignorer	d	b

Equilibres purs : exactement une personne aide (a) → (b)

Equilibres mixtes : on peut supposer

que tous les participants jouent la même stratégie (le jeu est symétrique et le théorème de Nash montre qu'il ex. des équilibres symétriques) :

$$m_i(\text{aider}) = p \in (0,1)$$

$$q := (1-p)^{n-1} \quad \text{// tous les autres ignorent}$$

Eq. de Nash \Rightarrow

$$a \cdot q + c(1-q) = d \cdot q + b(1-q)$$

$$(a-d)q = (1-q)(b-c)$$

$$(a-d+b-c)q = b-c$$

$$q = \frac{b-c}{a-d+b-c}$$

$$p = 1 - \left(\frac{b-c}{a-d+b-c} \right)^{\frac{1}{n-1}} \notin \mathbb{Q}$$

Question : serait-il possible que le problème de Nash est NP-c?

En tant que problème de décision (est-ce qu'il existe un équilibre): non, car la réponse est tyr. "oui".

Nash - Approximation

Entrée jeu $(J_1, \dots, J_n, p_1, \dots, p_n)$,
 $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$

Question Calculer un ε -équilibre de Nash :

\mathbb{Q}
 \downarrow
 $m = (m_i)_{i=1}^n$ tyr. $\forall i, \forall m_i'$:

$$p_i(m_i') \leq p_i(m) + \varepsilon$$

$$m_i' = (m_i', m_{-i})$$

(Nash-approx est dans NP (on peut le vérifier), mais

il n'est pas probable qu'il soit NP-complet :

Supposons que $\text{Sat} \leq_p \text{Nash-approx.}$

Donc : $\varphi \rightarrow \text{jeu } G$

tg. φ satisfaisable \Leftrightarrow

G a un ε -équilibre

Si $\varphi \notin \text{Sat}$ la réduction donne un jeu G pour lequel on peut trouver un ε -éq. de Nash

$\rightarrow \overline{\text{Sat}} \leq \text{Sat} \rightarrow \text{NP} = \text{co-NP}$

Rq. Par contre il y a des variantes NP-complètes :

- est-ce qu'il ex. éq. de Nash avec payoff ≥ 1 ?
- est-ce qu'il ex. au moins 2 éq. de Nash ?

Classe de complexité PPAD
(polynomial parity arguments on directed graphs) :

Pb. End-of-line

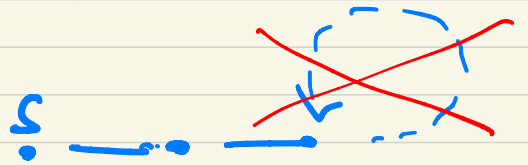
Entrée graphe G , de taille $\exp.$,
donné par succ/pred, tq.

$\forall v : |\text{pred}(v)|, |\text{succ}(v)| \leq 1;$

$s \in V$ tq. $\text{pred}(s) = \emptyset$

Q Déterminer $t \neq s$ tq. soit
 $\text{pred}(t) = \emptyset$ ou $\text{succ}(t) = \emptyset$

t existe tq. car



Problèmes PPAD-complets :

- ε - ϵ g. de Nash pour $n > 2$
- ϵ g. de Nash pour $n = 2$
- calcul de point fixe Brouwer

Algorithme de Lemke - Howson
pour calculer un éq. de Nash
pour 2 joueurs.

wlog : jeu symétrique

$$S_1 = S_2 = \{1, \dots, n\}, \quad p_1 = p_2 = p$$

On cherche éq. symm. :

$$m_1 = m_2 = m = (r_i)_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1, \quad r_i \geq 0$$

lemme

$$\left\{ \begin{array}{l} p(m, m) \geq p(i, m) \quad \forall i \in \overline{1, n} \\ \text{si } r_i > 0 \Rightarrow p(m, m) = p(i, m) \end{array} \right.$$

supposons qu'on trouve

$$m = (r_1, \dots, r_n) \text{ et } q \text{ éq.}$$

$$m = (r_1, \dots, r_n)$$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1$$

$$p(m, m) \geq$$

$$r_1 \geq 0, \quad q \geq p(1, m),$$

:

$$r_n \geq 0 \quad \& \quad q \geq p(n, m)$$

$$p(m, m)$$

$$\text{et } \forall i: \quad r_i = 0 \quad \vee \quad q = p(i, m)$$

$\Rightarrow (m, m)$ est éq. de Nash

On cherche z_1, \dots, z_n tq.

$$z_1 \geq 0, \quad 1 \geq \sum_j z_j \cdot p(1, j),$$

:

$$z_n \geq 0 \quad 1 \geq \sum_j z_j \cdot p(n, j)$$

$$\sum_i z_i > 0$$

$$\text{et } \forall i: \quad z_i = 0 \quad \vee \quad 1 = \sum_j z_j \cdot p(i, j)$$

$$\Rightarrow \quad r_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^n z_i} \quad \text{éq. de Nash}$$

Ex

	1	2	3
1	0 0	3 0	0 2
2	0 3	0 0	3 2
3	2 0	2 3	2 2

$R = C^T =$

(1) $z_1 \geq 0$ (1') $1 \geq 3z_2$

(2) $z_2 \geq 0$ (2') $1 \geq 3z_3$

(3) $z_3 \geq 0$ (3') $1 \geq 2z_1 + 2z_2 + 2z_3$

On cherche une solution dans un polytope borné.

Polytope : sommet = ensemble de n équations ($n=3$)

Hypothèses

- tous les coeff. sont ≥ 0
- pas de ligne / colonne $\equiv 0$
- tout ensemble de n équations a au plus une solution

- Sommet spécial du polytope : $(0, 0, 0)$
(ne satisfait pas $\sum z_i > 0$)

- Stratégie i est représentée dans un sommet (z_1, z_2, z_3) si soit (i) ou (i') est satisfaite avec égalité.

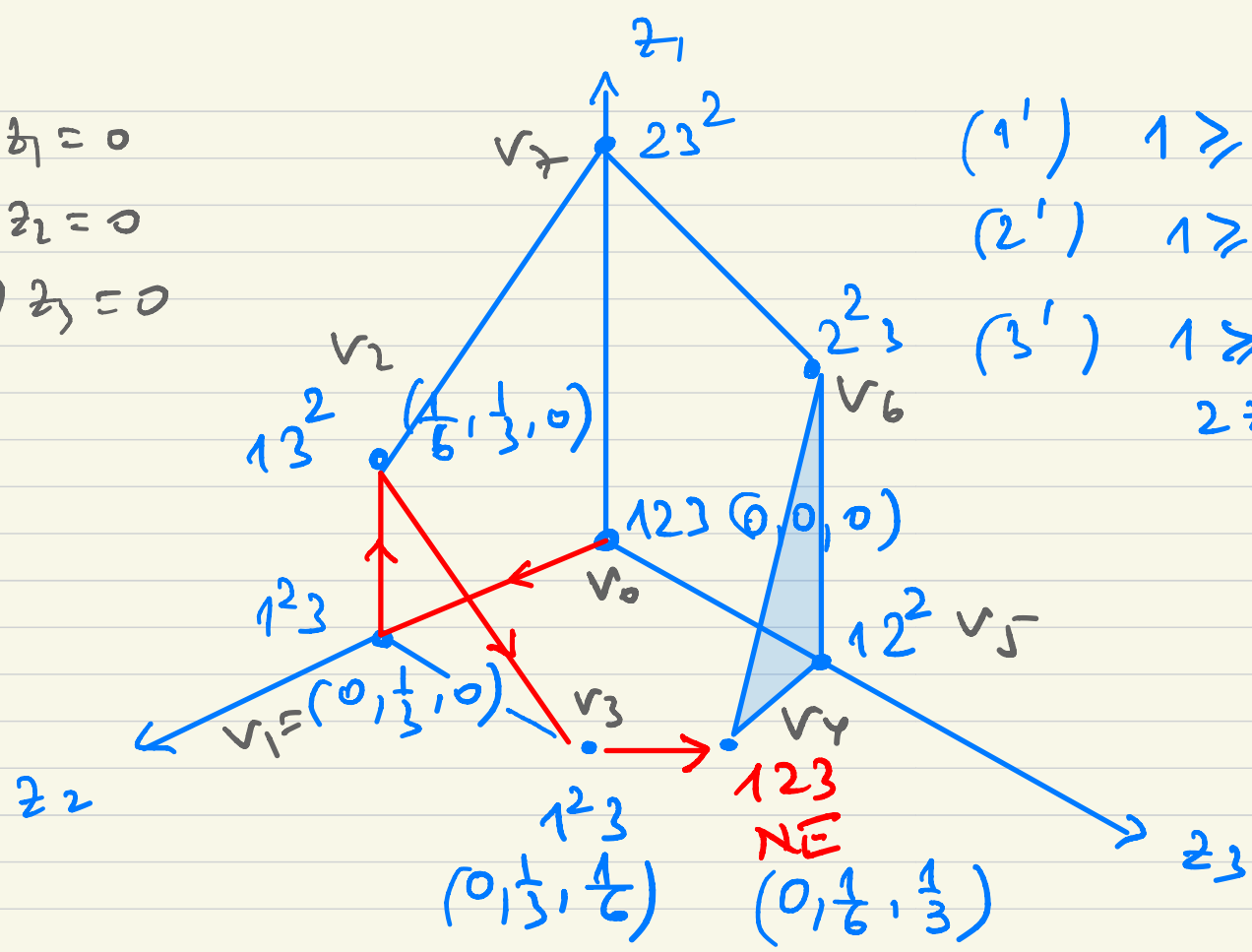
Rq. Tout sommet où toutes les stratégies $(1, 2, 3)$ sont représentées - sauf $(0, 0, 0)$ - est NE.

Rq. Si un sommet est tq. pas toutes les stratégies y sont représentées, alors une strat. y est doublement représentée (cad, $\exists k$ tq. (k) et (k') sont satisfaites avec égalité)

Q Comment trouver un sommet $\neq (0, 0, 0)$ où toutes les stratégies sont représentées ?

- (1) $z_1 = 0$
- (2) $z_2 = 0$
- (3) $z_3 = 0$

- (1') $1 \geq 3z_2$
- (2') $1 \geq 3z_3$
- (3') $1 \geq 2z_1 + 2z_2 + 2z_3$



$v_0 / 123 : z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 0$

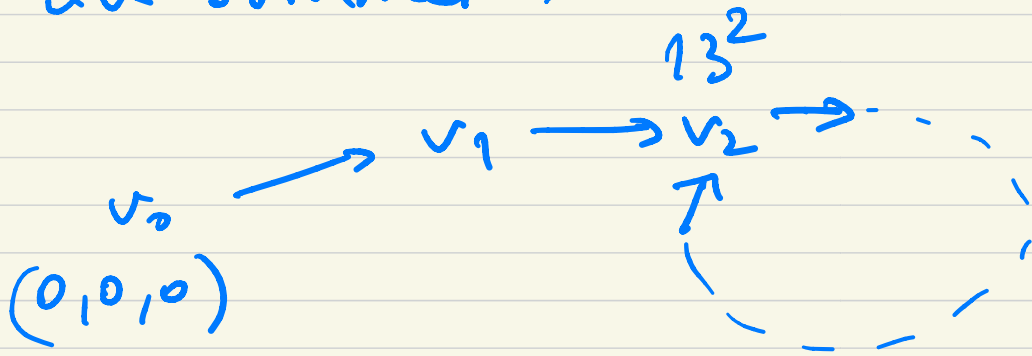
$v_1 / 1^23 : z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{3}, z_3 = 0$
(1) (1') (3)

$v_2 / 13^2 : z_2 = \frac{1}{3}, z_1 = \frac{1}{6}, z_3 \geq 0$
(1') (3') (3)

$v_3 / 1^23 : z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{3}, z_3 = \frac{1}{6}$
(1) (1') (3')

$v_4 / 123 : z_1 = 0, z_3 = \frac{1}{3}, z_2 = \frac{1}{6}$
(1) (2') (3')

- On passe d'un sommet v_i à v_{i+1} en choisissant une stratégie (égalité) doublement représentée dans v_i (deus revient à v_{i-1}).
- On s'arrête si toutes les stratégies sont représentées \rightarrow NE
- le chemin ne peut pas répéter un sommet :



\Rightarrow le chemin doit s'arrêter.

Il s'arrête dans un sommet de type 123. Qui ne peut pas être $(0,0,0)$ (deus d'exemple

tous les v_i n'ont pas 2 $\Rightarrow z_2 > 0$

Mais pour revenir à v_0 il faut passer par des sommets avec $z_2 = 0$.

Jeu à 2 joueurs

- symétrique : $\begin{cases} C = R^T \\ C(i,j) = R(j,i) \end{cases}$

Tout jeu symm. possède NE symm.

- Réduction jeu à jeu symm

$$M = \begin{pmatrix} 0_{m,m} & R \\ C & 0_{n,n} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} R: m,n \\ C: n,m \end{array}$$

① (\bar{x}, \bar{y}) NE de (R, C)

$\Leftrightarrow \forall \bar{x}', \bar{y}' :$

$$\bar{x}^T R \bar{y} \geq \bar{x}'^T R \bar{y} \quad ,$$

$$\bar{y}^T C \bar{x} \geq \bar{y}'^T C \bar{x}$$

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{y}) M \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= (\bar{y}^T C, \bar{x}^T R) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \\ &= \bar{y}^T C \bar{x} + \bar{x}^T R \bar{y} \geq \end{aligned}$$

$$(\bar{x}', \bar{y}') M \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \bar{y}'^T C \bar{x} + \bar{x}'^T R \bar{y}$$

② $((\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y})) \notin E$

Il suffit de montrer :

$$\bar{x}^T R \bar{y} \geq \bar{x}'^T R \bar{y}, \quad \forall \bar{x}'$$

$$\bar{y}^T C \bar{x} \geq \bar{y}'^T C \bar{x}, \quad \forall \bar{y}'$$

Si $\bar{x}^T R \bar{y} < \bar{x}'^T R \bar{y}$ alors

$$\begin{aligned} (\bar{x}', \bar{y}) M \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} &= \bar{y}^T C \bar{x} + \bar{x}'^T R \bar{y} \\ &> (\bar{x}, \bar{y}) M \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \quad \text{contradiction} \end{aligned}$$

Req ① Si $(\bar{x}, \bar{y}) \in E$, $\sum x_i = 1, \sum y_j = 1$

alors $\bar{z} = (\frac{1}{2} \bar{x}, \frac{1}{2} \bar{y})$ est $\in E$.

$$\sum z_i = 1$$

② Si (\bar{x}, \bar{y}) est $\in E$, $\sum x_i + \sum y_j = 1$

alors $\bar{x}^* = \frac{\bar{x}}{\sum x_i}, \bar{y}^* = \frac{\bar{y}}{\sum y_j}$ est

distrib. . Et on peut supposer que

$\bar{x} \neq 0, \bar{y} \neq 0$ si $(\bar{x}, \bar{y}) \notin E$.