

Théorème de Nash

.



Retour sur équilibres et détermination des jeux

Ex Prix équitable

$p(s, m)$: note de l'étudiant s
pour la matière m

- 1 le conseil des étudiants choisit un étudiant s .
- 2 le jury choisit une matière m .
- 3 le prix est $p(s, m) \cdot 100$.

⊗ CE maximise, jury minimise (0-sum)

Est-ce que CE a l'intérêt
d'inverser (1) et (2) ?

Résultat de (1) $\rightarrow$ (2) :

$\min_m p(s_0, m)$: s_0 choisi
par CE

Résultat de (2) $\rightarrow$ (1)

$\max_s p(s, m_0)$: m_0 choisi
par jury

Rq :

$$\min_m p(d_0, m) \leq p(d_0, m_0) \leq \max_s p(s, m_0) \\ \text{pour tout } s_0, m_0$$

On a donc :

$$\begin{array}{ccc} (*) \max_s \min_m p(d, m) & \leq & \min_m \max_s p(s, m) \\ \parallel & & \parallel \\ \min_m p(d_0, m) & & \max_s p(s, m_0) \end{array}$$

Si maintenant les choix de
CE et Jury sont faits
simultanément, quand est-ce
qu'ils ne regrettent pas leur
choix ?

Si CE choisit d_0 et Jury m_0
alors aucun ne regrette

$\Rightarrow$

$$\forall s: p(s, m_0) \leq p(s_0, m_0)$$

et

$$\forall m: p(s_0, m) \geq p(s_0, m_0)$$

$\Rightarrow$

$$\max_s p(s, m_0) \leq p(s_0, m_0) \leq$$

$$\min_m p(s_0, m)$$

Ce qui implique:

$$\min_m \max_s p(s, m) \leq p(s_0, m_0) \leq$$

$$\max_s \min_m p(s, m)$$

Avec $\otimes$ on obtient :

$$\min_m \max_s p(s, m) = p(s_0, m_0) =$$

$$\max_s \min_m p(s, m)$$

Comparaison avec jeux à 2 joueurs
à information parfaite (sans parties
indécises):

jeu est déterminé si soit P_0
ou P_1 a une stratégie gagnante

σ_i : stratégie de P_i

$$p(\sigma_0, \sigma_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } P_0 \text{ gagne} \\ -1 & \text{si } P_1 \text{ gagne} \end{cases}$$

le jeu est déterminé si

$$\alpha := \max_{\sigma_0} \min_{\sigma_1} p(\sigma_0, \sigma_1) = \min_{\sigma_1} \max_{\sigma_0} p(\sigma_0, \sigma_1) =: \beta$$

$(\Rightarrow)$ On a toujours $\alpha \leq \beta$ par (X) .

Si P_0 gagne avec $\hat{\sigma}_0$ alors

$$\min_{\sigma_1} p(\hat{\sigma}_0, \sigma_1) = 1 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \beta \leq \alpha$$

Si P_1 gagne avec $\hat{\sigma}_1$:

$$\max_{\sigma_0} p(\sigma_0, \hat{\sigma}_1) = -1$$

$$\Rightarrow \beta = -1 \quad \Rightarrow \quad \beta \leq \alpha$$

Dans les 2 cas : $\alpha = \beta$

($\Leftarrow$) Si $\alpha = \beta = 1$:

$$\exists \hat{\sigma}_0 \text{ tq. } \min_{\sigma_1} p(\hat{\sigma}_0, \sigma_1) = 1$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}_0$ gagnante pour P_0

Si $\alpha = \beta = -1$: idem pour P_1

Jusqu'à maintenant on a déf.
les éq. de Nash avec stratégies
pures ($s_i \in S_i$),

Pierre - feuille - ciseaux $\rightarrow$ choix probab.

- On va introduire des stratégies
probabilistes ("mixtes")
- On va montrer le thm. de Nash,
qui dit que dans tout jeu fini il
existe au moins un éq. de Nash
avec strat. mixtes
- On va montrer comment calculer
un éq. de Nash dans le cas spécif.
de 2 joueurs à zero sum!
Minimax - Théorème (von Neumann)

$A \neq \emptyset$ fini

Une distrib. de prob. sur A :

$$pr: A \rightarrow [0, 1]$$

$$\sum_{a \in A} pr(a) = 1$$

On note par ΔA = ens. des distrib.
de proba: sur A

Jeux stratégiques

$$(S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$$

Une strat. mixte pour le joueur i

= distrib. de proba sur S_i

Not. ΔS_i = ens. des stratégies mixtes
pour i

$$m_i \in \Delta S_i$$

$$\text{supp}(m_i) = \{s \in S_i : m_i(s) > 0\}$$

$$m \in \Delta S_1 \times \dots \times \Delta S_n \rightarrow$$

$$m = (m_1, \dots, m_n)$$

$$m_{-i} = (m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n)$$

$$s = (s_i)_i$$

payoff | $m(s) := m_1(s_1) \cdot m_2(s_2) \cdot \dots \cdot m_n(s_n)$

$$p_i(m) = \sum_{s \in S} \underbrace{m(s)}_{\in [0,1]} \cdot \underbrace{p_i(s)}_{\substack{\uparrow \\ \text{matrix}}}$$

ex Matching pennies

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

pas d'éq. de Nash
pour

$$m_1 = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} T = m_2$$

$$p_1(m) = 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 = p_2(m)$$

def m est eq. de Nash si pour tout i , et pour toute strat. mixte m_i' :

$$p_i(m) \geq p_i(m_i', m_{-i})$$

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

$$m_1 = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} T =$$

m_2 est Eq. de Nash

$$m_1' = p \cdot H + (1-p) \cdot T$$

$$p_1(m_1', m_2) = 1 \cdot \frac{p}{2} + (-1) \cdot \frac{p}{2} + (-1) \cdot \frac{1-p}{2} + 1 \cdot \frac{1-p}{2} = 0 = p_1(m)$$

[IESDS]: iterated elimination of strictly dominated strategies

→ on élimine une stratégie (pure) si elle est strictement dominée par une stratégie mixte m_i :

$$p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(m_i, m_{-i}), \quad \forall m_{-i}$$

Rq. L'ordre d'élimination n'est pas important. Les équilibres de Nash ne sont pas éliminés par IESDS

Ex Pour MP, la strat. H n'est pas strict. dominée, par aucune strat. mixte m_1 , car avec

$$\begin{cases} m_2 = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}T \\ m_1 = r \cdot H + (1-r)T \end{cases} \quad \text{on a}$$

$$p_1(H, m_2) = \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$= p_1(m_1, m_2) = \frac{r}{2} + \frac{1-r}{2} - \frac{r}{2} - \frac{1-r}{2} = 0$$

Donc iESDS n'inclut aucune stratégie dans MP.

lemme Pour tout jeu stratégique
($S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n$) on a
équivalence des points suivants :

(1) m est éq. de Nash

(2) Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout
 $s_i \in S_i$:

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

(3) Pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout
 $s_i \in S_i \cap \text{supp}(m)$:

$$p_i(m) = p_i(s_i, m_{-i})$$

et pour tout i et tout

$s_i \in S_i \setminus \text{supp}(m)$:

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

démo

(1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1)

$$p_i(m) = \sum_{s \in \text{supp}(m)} m_i(s_i) \cdot m_{-i}(s_{-i}) \cdot p_i(s)$$

$$= \sum_{s_i \in \text{supp}(m_i)} m_i(s_i) \cdot p_i(s_i, m_{-i})$$

Ex Battle of sexes : possible aussi un Éq de Nash en strat. mixtes

1 \ 2	F	B
	F	B
F	(2, 1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 2)

$$m_1 = r_1 \cdot F + (1 - r_1) \cdot B$$

$$m_2 = r_2 \cdot F + (1 - r_2) \cdot B$$

$$0 < r_1, r_2 < 1$$

$$p_1(m) = 2 \cdot \overset{4/9}{r_1} \cdot \overset{2/9}{r_2} + (1 - r_1) \cdot (1 - r_2) = \frac{2}{3}$$

$$p_2(m) = \overset{2/9}{r_1} \cdot \overset{2/9}{r_2} + 2 \cdot (1 - r_1) \cdot (1 - r_2) = \frac{2}{3}$$

Si m Éq. de Nash :

$$\textcircled{3} \text{ support}(m_1) = \{F, B\}$$

$$\downarrow p_1(m) = \underset{\substack{\parallel \\ 2r_2}}{p_1(F, m_2)} = \underset{\substack{\parallel \\ 1 \cdot (1 - r_2)}}{p_1(B, m_2)}$$

$$\Rightarrow 2r_2 = 1 - r_2 \Rightarrow \textcircled{r_2 = \frac{1}{3}}$$

$$p_2(m) = \underset{\substack{\parallel \\ r_1}}{p_2(m_1, F)} = \underset{\substack{\parallel \\ 2(1 - r_1)}}{p_2(m_1, B)}$$

$$\Rightarrow \textcircled{r_1 = \frac{2}{3}}$$

Ex: MP

$$m_1 = r_1 \cdot H + (1-r_1) \cdot T$$

$$m_2 = r_2 \cdot H + (1-r_2) \cdot T$$

$$\begin{aligned} p_1(m) &= r_1 r_2 + (1-r_1)(1-r_2) \\ &\quad - r_1(1-r_2) - (1-r_1)r_2 \\ &= r_1 r_2 + 1 - r_1 - r_2 + r_1 r_2 \\ &\quad - r_1 + r_1 r_2 - r_2 + r_1 r_2 \\ &= 4r_1 r_2 - 2r_1 - 2r_2 + 1 \end{aligned}$$

Si $\text{support}(m_1) = \{H, T\}$:

$$p_1(H, m_2) = p_1(T, m_2)$$

$$\begin{aligned} r_2 - (1-r_2) &= -r_2 + (1-r_2) \\ 2r_2 &= 2(1-r_2) \Rightarrow r_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

? $(H, m_2^{\frac{1}{2}})$ eq. de Nash?

$$\begin{aligned} p_1(H, m_2) &= r_2 - (1-r_2) = 2r_2 - 1 \\ &= 4r_1 r_2 - 2r_1 - 2r_2 + 1 \end{aligned}$$

Th. de Nash (~ 1950)

Tout jeu stratégique fini a au moins un éq. de Nash avec strat. mixtes.

Rq Il y a des jeux qui n'ont pas de éq. de Nash en strat. pures (ex. MP, PFC, ...).

Preuve en utilisant le thm. de point fixe de Brouwer.

[Brouwer]: Si $D \subseteq \mathbb{R}^d$ est convexe et compact, et $f: D \rightarrow D$ est continue, alors il ex. $x \in D$ tq. $f(x) = x$.

On déf. pour $i \in [1..n]$, m strat. mixte, $s_i \in S_i$:

$$\text{Gain}_{s_i}(m) = \max \{ p_i(s_i, m_{-i}) - p_i(m) ; 0 \}$$

On applique Brouwer avec

- $D = [0, 1]^{s_1} \times \dots \times [0, 1]^{s_n}$

- $\forall m \in D : f(m) = m' \text{ tq.}$

$$\forall i, \forall s_i \in S_i :$$

$$m'_i(s_i) := \frac{m_i(s_i) + \text{Gain}_{s_i}(m)}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} \text{Gain}_{s'_i}(m)}$$

$$\underline{\text{Rq}} \quad \sum_{s_i \in S_i} m'_i(s_i) = 1$$

$$\underline{\text{Rq}}. \quad f \text{ est continue}$$

On montre que si $m = f(m)$, alors m est équilibre de Nash.

Il suffit de montrer :

$$\begin{aligned} & \text{Gain}_{s_i}(m) = 0, \quad \forall i, s_i \in S_i \\ & \text{''} \\ & \max \{ p_i(s_i, m_{-i}) - p_i(m); 0 \} \end{aligned}$$

$$\text{Gain}_{s_i}(m) = 0, \forall i, s_i \in S_i :$$

Supposons par contradiction qu'il
ex. $i, s_i \in S_i$ tq.

$$\text{Gain}_{s_i}(m) > 0 \quad (\Leftrightarrow p_i(s_i, m_{-i}) > p_i(m))$$

On note que $\underline{m_i(s_i)} > 0$.
(pas possible d'avoir $m_i(s_i) = 0$
à cause de $m'_i(s_i) > 0$ et $m = m'$)

$$p_i(m) = \sum_{s'_i \in S_i} m_i(s'_i) \cdot p_i(s'_i, m_{-i})$$

$f(m) = m' (=m)$

À cause de $m_i(s_i) > 0$ et
 $p_i(s_i, m_{-i}) > p_i(m)$, il doit ex.
 $s'_i \in S_i$ tq. $m_i(s'_i) > 0$ et
 $p_i(s'_i, m_{-i}) < p_i(m)$

$$(\Rightarrow \text{Gain}_{s'_i}(m) = 0)$$

Donc

$$\underline{m'_i(s'_i)} \stackrel{df}{=} \frac{m_i(s'_i) + \text{Gain}_{s'_i}(m)}{1 + \sum \text{Gain}_{s'_i}(m)} <$$

$\underline{m_i(s'_i)} \rightarrow \text{contradict } m = m' !$

Maintenant : cas spécial 2 joueurs,
zero-sum

- (1) R (row)
(2) C (column)

Jeu décrit par 2 matrices R, C
de dimension $m \times n$.

($R = -C$ si somme nulle)

$$\Delta S_R = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m : \sum x_i = 1 \}$$

$$\Delta S_C = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \sum y_j = 1 \}$$

Etant données $\bar{x}, \bar{y}$, le payoff
de R est $\underline{\bar{x}^T R \bar{y}}$. ($C : \bar{x}^T C \bar{y}$)

$(\bar{x}, \bar{y})$ est éq. de Nash ssi

$$\bar{x}^T R \bar{y} \geq \bar{x}'^T R \bar{y} \quad , \quad \forall \bar{x}'$$

$$\bar{x}^T C \bar{y} \geq \bar{x}^T C \bar{y}' \quad , \quad \forall \bar{y}'$$

R : max , C : min

zero-sum : $C = -R$

<u>Ex</u>		E:	I:
		Energie rennvr.	Réd myob
A:	Retraites anticipée	3, -3	-1, 1
D:	Haussse dépenses	-2, 2	1, -1

Si joueur R annonce la stratégie $\bar{x} = (x_A, x_D)$ alors joueur C obtient:

le gain espéré :

$$E(E) = -3x_A + 2x_D$$

$$E(I) = x_A - x_D$$

Valeur optimale pour C :

$$\max \{-3x_A + 2x_D, x_A - x_D\}$$

Si R doit annoncer sa stratégie $\bar{x}$ en premier, alors le choix opt. est

$$\max_{(x_A, x_D)} \min \{3x_A - 2x_D, -x_A + x_D\}$$

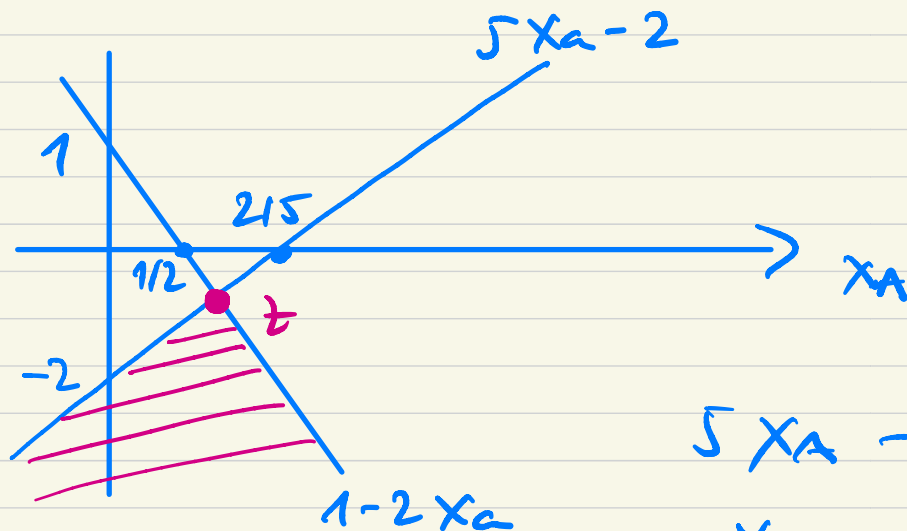
le choix opt de R est donc la solution du pb. d'optimisation suivant :

$$\max z \quad \text{tq.}$$

$$\begin{cases} 3x_A - 2x_D \geq z \\ -x_A + x_D \geq z \\ x_A + x_D = 1 \\ x_A, x_D \geq 0 \end{cases} \quad \text{LPR}$$

$$z \leq 3x_A - 2(1 - x_A) = 5x_A - 2$$

$$z \leq 1 - 2x_A$$



$$5x_A - 2 = 1 - 2x_A$$

$$x_A = 3/7$$

$$x_D = 4/7$$

$$z = \frac{1}{7}$$

le choix opt. de C :

max w tq.

$$\left\{ \begin{array}{l} -3y_E + y_I \geq w \\ 2y_E - y_I \geq w \\ y_E + y_I = 1 \\ y_E, y_I \geq 0 \end{array} \right. \quad LP_C$$

$$\leadsto y_E = \frac{2}{7}, y_I = \frac{5}{7}, w = -\frac{1}{7}$$

Rq. si R joue $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ et

C joue $(\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$ alors R gagne $1/7$ et C perd $1/7$.

- si R joue $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, C ne peut pas gagner plus, à cause de LP_R
 - si C joue $(\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$, R ne peut pas gagner plus, à cause de LP_C .
- donc on a un éq. de Nash!

$$\max_x \min_y x^T R y \quad : \quad \text{gain maximal de } R$$

$$\max_y \min_x x^T C y \quad : \quad \text{--- de } C$$

(perte minimale)

|| (*)

$$- \min_y \max_x x^T R y$$

$$(*) \quad \max_y \min_x x^T C y \quad \begin{matrix} C = -R \\ = \end{matrix}$$

$$\max_y \min_x (-x^T R y) =$$

$$- \min_y \max_x x^T R y$$

Le thm. Min-Max suivant dit que le gain maximal de R est égal à la perte minimale de C .

Le théorème Min-Max (von Neumann)

Etant donné: $R \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$\max_x \min_y x^T R y = \min_y \max_x x^T R y$$

$\Rightarrow \max_x \min_y x^T R y$ est la sol.
optimale de:

$$\text{LP}_R: \quad \begin{array}{l} \underline{\max z} \quad \text{tg.} \\ \left\{ \begin{array}{l} x^T R \geq z \cdot \bar{1}^T \\ x^T \cdot \bar{1} = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \in [1, m] \end{array} \right. \end{array}$$

En optimisation linéaire (LP):

LP primal	LP dual
$\max (c^T x) \quad \text{tg.}$	$\min (b^T y) \quad \text{tg.}$
$Ax \leq b$	$A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

le théorème de dualité forte :

$$\text{On a } \max_x (C^T x) = \min_y (b^T y)$$

si un des deux LP a une solution optimale.

LP_R a des sol., et elles sont bornées $\rightarrow$ sol. opt. existe

Dual de LP_R : $\min z'$ tq.

$$LP' : \begin{cases} -y^T R^T + z' \bar{1}^T \geq 0 \\ y^T \cdot \bar{1} = 1 \\ y_j \geq 0, \quad \forall j \in [1, n] \end{cases}$$

On met $z'' = -z'$, et on applique
 $C = -R$ pour réécrire LP' :

$$\max z'' \quad \text{tq.}$$

$$LP_C : \begin{cases} Cy \geq z'' \cdot \bar{1} \\ y^T \cdot \bar{1} = 1 \\ y_j \geq 0, \quad \forall j \end{cases}$$

$$C = -R$$

Rg
1) LP_C est le pb. d'optimisation obtenu si C annonce sa stratégie en premier.

2) La valeur opt. de z'' est

$$\max_y \min_x (x^T C y)$$

$$3) \max_y \min_x (x^T C y) = - \min_y \max_x (x^T R y)$$

Thm Si (x, z) est sol. opt. de LP_R et (y, z'') est sol. opt. de LP_C , alors (x, y) est éq. de Nash, et $z'' = -z$.

démo 1) $x^T R \geq z \cdot \bar{1}^T \Rightarrow$

$$(1) \quad \forall y: \quad x^T R y \geq z \quad (1 = \bar{1}^T y)$$

$$2) \quad C y \geq z'' \cdot \bar{1} \Rightarrow$$

$$(2) \quad \forall x': \quad \begin{aligned} x'^T C y &\geq z'' \\ x'^T R y &\leq -z'' \end{aligned}, \text{ donc}$$

Si C joue le strat. y :

- R gagne au plus $-z'' = z$ (eq. (2))
 $\uparrow$ (dualité)

- R gagne au moins z (eq. (1))

$\Rightarrow$ donc R gagne exactement z

$\Rightarrow x$ est le strat. opt. de R

De façon analogue, y est le strat. opt. de C .

On peut montrer aussi :

Si (x, y) est éq. de Nash, alors

$(x, x^T R y)$ est sol. opt. de LP_R

et $(y, -x^T C y)$ est sol. opt. de

LP_C .

Ordre d'élimination n'est pas important.

(1) s_i éliminée par m_i , puis

(2) $s'_j \leftarrow m'_j$

$$p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(m_i, m_{-i}), \forall m_{-i}$$

$$\Rightarrow \exists \hat{s}_i \in \text{supp}(m_i) :$$

$$p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(\hat{s}_i, m_{-i}), \forall m_{-i}$$

- $j \neq i \Rightarrow$ (2), puis (1) possible

- $j = i \Rightarrow s_i \notin \text{supp}(m'_i)$

si $s'_i \notin \text{supp}(m_i) : (2)$, puis (1) possible

si $s'_i \in \text{supp}(m_i) :$

$$m_i'' := m_i [s'_i \leftarrow \hat{s}_i']$$

$$p_i(s'_i, m_{-i}) < p_i(\hat{s}_i', m_{-i}), \forall m_{-i}$$

$$\Rightarrow p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(m_i'', m_{-i}), \forall m_{-i}$$

Donc (2), ensuite (1') : s_i est éliminée par m_i'' .