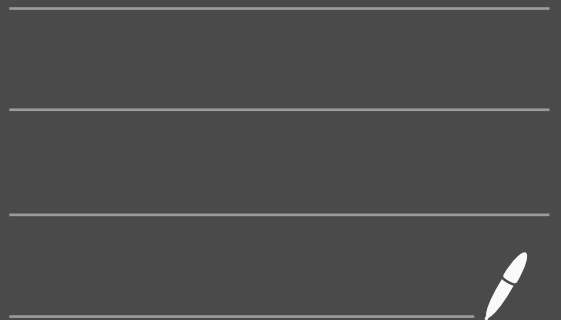


Parity games

Non-determined games



Jeux de parité

$$(V_0 \dot{\cup} V_1, E, p: V \rightarrow \{0, \dots, d\})$$

$p(v)$ = priorité (couleur) de v

$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$ gagnée par P_0

si $\max \{ p : \exists^\infty n : p(v_n) = p \}$
est paire

ex $\textcircled{5}_3 \rightarrow \textcircled{4}_2^2$ $s, t, t, \dots$ est gagnée par P_0

On veut calculer :

$W_0 = \{ v : v \text{ gagnée par } P_0 \}$

$W_1 = \dots P_1$

On va montrer : ① $V = W_0 \dot{\cup} W_1$
(jeux déterminés)

② stratégies gagnantes positionnelles
 $\tau_i : V_i \rightarrow V$

Algorithme récursif (McNaughton - Hebrank)

Parity(G)

Input: $G = (V_0, V_1, E)$, $p: V \rightarrow \{0, \dots, d\}$

Output: (w_0, w_1)

if $V = \emptyset$ return $(\emptyset, \emptyset)$ $i \in \{0, 1\}$

$i := d \bmod 2$;

$U := \{v \in V : p(v) = d\}$ // $U \neq \emptyset$

$A := \text{Attr}_i(U)$; // attracteur de P_i vers U

Parity($G \setminus A$) $\rightarrow (w'_0, w'_1)$

if $w'_{1-i} = \emptyset$ then

$w_i := w'_i \cup A$. $w_{1-i} := \emptyset$

return (w_0, w_1)

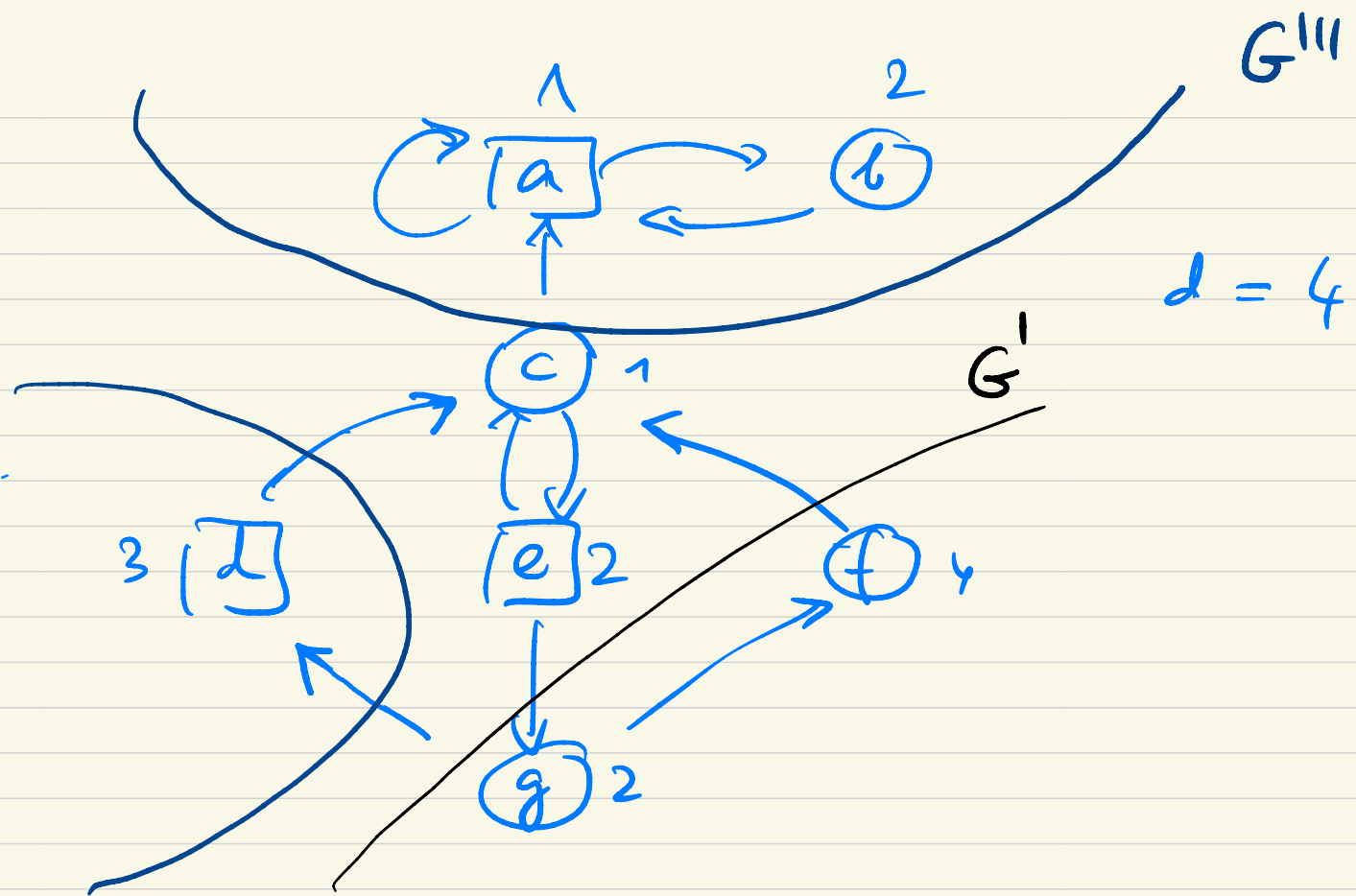
else $B := \text{Attr}_{1-i}(w'_{1-i})$ // $w'_{1-i} \neq \emptyset$

Parity($G \setminus B$) $\rightarrow (w''_0, w''_1)$

$w_i := w''_i$

$w_{1-i} := B \cup w''_{1-i}$

return (w_0, w_1)



$$i = 0$$

$$U = \{f\}$$

$$A_0 = \text{Alt}_0^G(f) = \{f, g\}$$

$$\underline{G' = G \setminus A_0} \rightarrow d = 3$$

$$i = 1$$

$$B_1 = \text{Alt}_1^{G'}(d) = \{d\}$$

$$G'' = G' \setminus B_1$$

$$\text{Parity}(G'') \rightarrow \left(\overset{w_0'}{\{c, e\}}, \overset{w_1'}{\{a, b\}} \right)$$

$$B_2 := \text{Alt}_0(\{c, e\}) = \{c, e, d\}$$

$$G''' := G' \setminus B_2$$

$$\text{Parity}(G''') \rightarrow (\emptyset, \{a, b\})$$

$$\text{Parity}(G') \rightarrow ({}^{B_2} [c, c, d], \{a, b\})$$

$$w_1' \neq \emptyset$$

$$B_3 := \text{Attr}_1^G(\{a, b\}) = \{a, b\}$$

$$G''' := G \setminus B_3$$

$$\text{Parity}(G''') = ({}^{w_0''} [c, d, e, f], {}^{w_1''} \emptyset)$$

Res. final

$$w_0 = \{c, d, e, f\}$$

$$w_1 = \emptyset \cup {}^{B_3} \{a, b\}$$

$$= {}^{w_1''} \{a, b\}$$

Complexité : $|V|=n, |E|=m$

$T_{n,m}(d)$ tmp. de calcul

$$T_{n,m}(d) \leq T_{n,m}(d-1) \xrightarrow{A} +$$

$$\Downarrow T_{n-1,m}(d) + O(m+n)_{\text{attr.}}$$

$$T_{n,m}(d) \leq O(m \cdot n^d) \quad \hookrightarrow B$$

$$T_{n,m}(d) \leq T_{n,m}(d-1) + T_{n-1,m}(d) + c(m+n)$$

$$T_{n,m}(d) \leq c' \cdot m \cdot nd$$

$$c' \cdot m \cdot nd^{d-1} + c' \cdot m \cdot (n-1)^d + c \cdot (m+n) \leq c' \cdot m \cdot nd$$

$$c' \cdot m \cdot \underbrace{(nd - nd^{d-1} - (n-1)^d)}_{\alpha} \geq c \cdot (m+n)$$

$$nd - (n-1)^d = nd^{d-1} + \underbrace{nd^{d-2}(n-1) + \dots + (n-1)^{d-1}}_{\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{l} d \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq n^2, \quad c' = 2c \\ d = 1, 2: \quad T_{n,m} \in O(n(m+n)) \end{array} \right)$$

Rq. Si d est fixé, la complexité est polynomiale (dans la taille de l'arête).

Rq

$$p: V \rightarrow \{1, 2\}$$

Buichi (accessibilité répétée)

$$d = 2$$

$$i = 0$$

$$F = \{v : p(v) = 2\}$$

$$A = \text{Altr}_0(F)$$

$$(\text{Parity}(G \setminus A) \rightarrow (\overset{\phi}{w_0'}, w_1'))$$

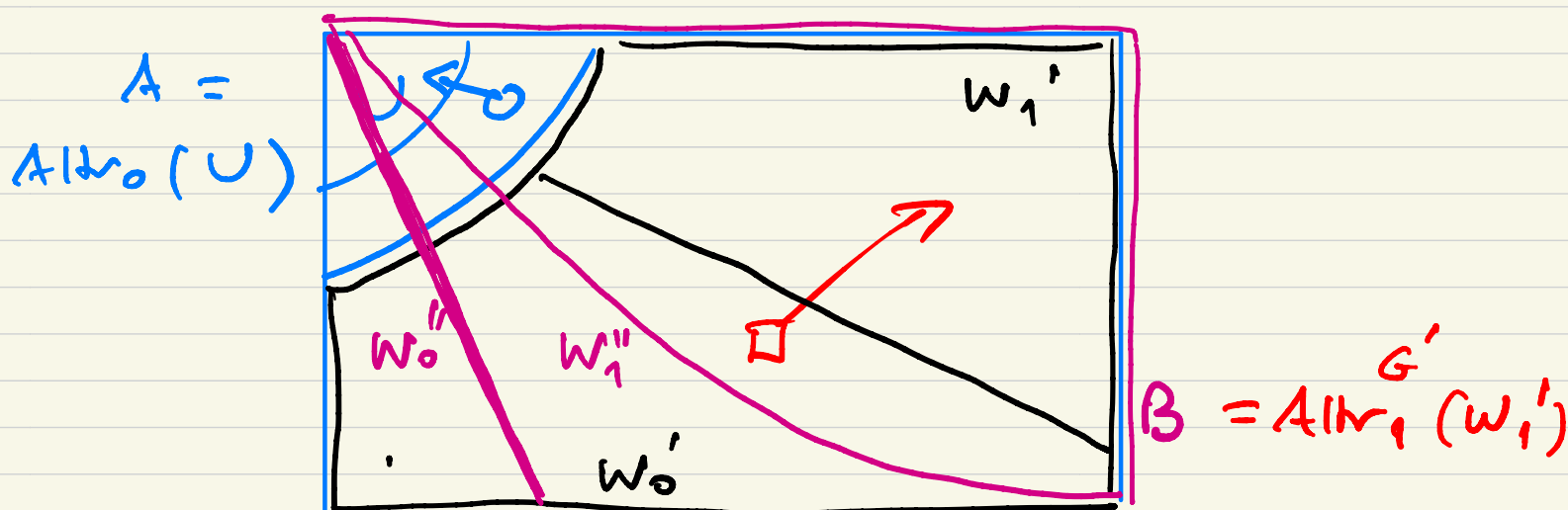
$$[\text{if } w_1' = \phi : \text{return}(A \cup w_0', \phi)]$$

else $B = \text{Altr}_1(w_1')$

$$\text{Parity}(G \setminus B) \rightarrow (w_0'', w_1'')$$

$$\text{return}(w_0'', B \cup w_1'')$$

d pair



On montre par récurrence que
l'algo de McNaughton - Stearns
calcule les régions gagnantes
 W_0, W_1 tq. $V = W_0 \cup W_1$, et
que les stratégies gagnantes sont
positionnelles.

Supposons $i = 0$.

Cas 1 $W_1' = \emptyset \rightarrow W_1 = \emptyset$
 $W_0 = A \cup W_0'$

σ_0 : strat. d'attracteur dans A ,
et strat. pos. σ_0' sur W_0'

Cas 2 $B = \text{Attr}_1(W_1')$, $G'' = G \setminus B$

$$\rightarrow W_0 = W_0'' , W_1 = B \cup W_1''$$

$\sigma_0 \rightarrow$ strat. gagn. σ_0'' sur W_0''

$\sigma_1 \rightarrow$ strat. d'attraction sur B ;

dès que la partie arrive dans

W_1' : str. gagn. pos. σ_1' sur W_1'

Pq $W_0'' \subseteq W_0$ avec σ_0 :

Parce que $G \setminus B$ est piège pour P_1

On montre que P_1 gagne sur W_1

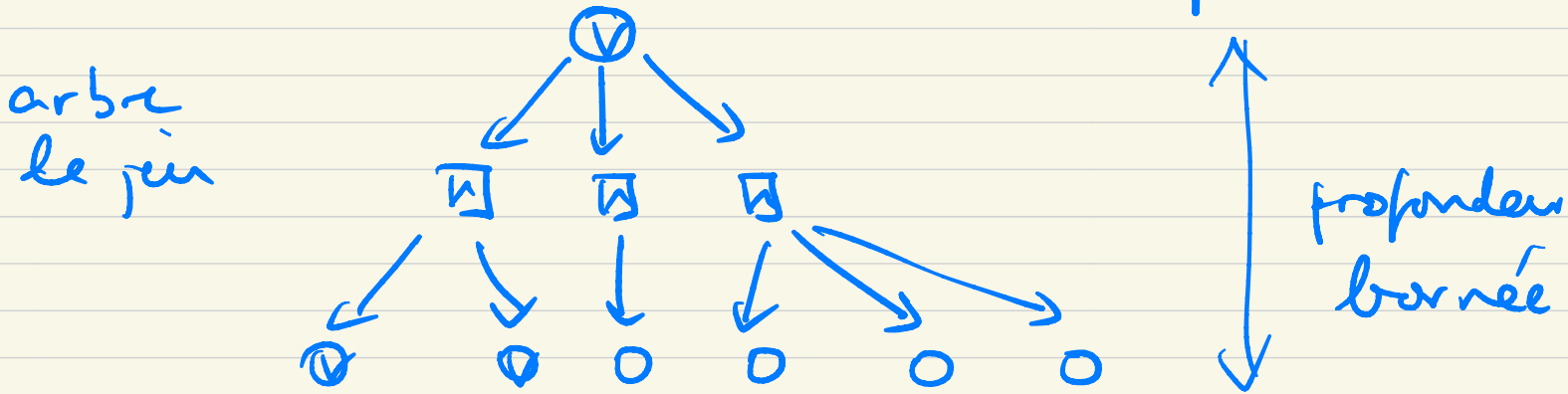
avec σ_1 :

a) si la partie commence dans B ,
alors elle atteint forcément W_1' ,
et y reste : P_1 gagne avec σ_1'

b) si la partie commence dans W_1'' :
soit elle y reste, ou elle va dans B
(P_1 gagne avec σ_1'') $\rightarrow$ cas a)

Jeux déterminés

Jeux finitaires : nb. fixé de coups



Les jeux finitaires sont déterminés.

P_0 : $\bigvee$
 $\exists$

P_1 : $\bigwedge$
 $\forall$

P_0 gagne si $\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \forall d_2 \dots$

c_i : coups de P_0
 d_i : " " P_1
 $(c_1, d_1, \dots)$ gagnant pour P_0

$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots)$

$= \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2 \dots$

$(c_1, d_1, \dots)$ gagnant pour P_1

Rq. Pour les jeux infinitaires,
l'argument "à la de Morgen"
ne marche plus :

$$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots) \neq \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2$$

Considérons le jeu suivant (Choquet):

P_0, P_1 jouent, en alternance, des
intervalles ouverts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

P_0 commence par $I_0 = (0, 1)$

P_0 gagne si $\bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$

Rq P_0 peut gagner, mais ce n'est
pas évident comment.

Supposons que P_0 choisit I_0 .

P_1 choisit J_1 avant (parce que c'est le plus grand). Alors P_0 perd:

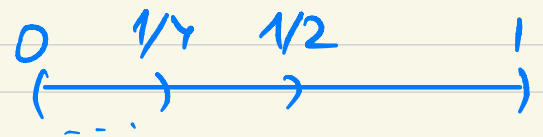
$$P_0 : (0, 1)$$

$$P_1 : (0, 1/2)$$

$$P_0 : (0, 1/2)$$

$$P_1 : (0, 1/4)$$

$\vdots$



$$\bigcap_{n \geq 0} (0, \frac{1}{2^n}) = \emptyset$$

Mais P_0 peut gagner ce jeu !

La stratégie de P_0 est de choisir $I_n = (a_n, b_n)$ tq.

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$$a \leq b$$

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$$

* Un jeu infuitaire qui n'est pas déterminé : on utilisera l'axiome du choix (AC)

On cherche un "XOR infini", qui sera une fonction $f: \{0,1\}^{\omega} \rightarrow \{0,1\}$
↑
suites binaires
infinies

avec la propriété :

$\boxed{\text{si } w, w' \in \{0,1\}^{\omega} \text{ diffèrent seulement à une position, alors } f(w) \neq f(w')}$

|| L'axiome du choix nous dit qu'une telle fonction f existe.

dém Considérons la relation d'équiv. suivante sur $\{0,1\}^{\omega}$:

$w \sim w'$ si w, w' diffèrent sur un nombre fini de positions

Soit $S \subseteq \{0,1\}^{\omega}$ un ensemble de représentants, un pour chaque classe d'équivalence ($\rightarrow$ AC)

Pour $w \in \{0,1\}^{\omega}$ on écrit

$r(w) \in S$ le représentant de la classe de w ($\{w' : w' \sim w\}$)

On déf.

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ et } r(w) \\ & \text{diffèrent sur nb.} \\ & \text{pair de positions} \\ 0 & \text{sinon (impair)} \end{cases}$$

Rq si w, w' diffèrent sur une position exactement $\Rightarrow$

- $f(w) \neq f(w')$
- $r(w) = r(w') = r$ ($w \sim w'$)

Avec f on déf. le jeu suivant :

- P_0, P_1 jouent en alternance, chaque comp correspond à un mot de $\{0,1\}^*$
- P_0 joue u_i , P_1 joue v_i

Partie : $\alpha = u_0 v_0 u_1 v_1 \dots \in \{0,1\}^\omega$

P_0 gagne la partie si $f(\alpha) = 1$

Ce jeu n'est pas déterminé.

On le démontre par contradiction, en supposant que P_1 a une stratégie gagnante Γ_1 (l'autre cas est symétrique).

On montre qu'on peut construire une partie gagnée par P_0

($\rightarrow$ contradiction au fait que Γ_1 est gagnante pour P_1)

Si P_0 commence par $u_0 = 0$
 alors soit $v_0 = \sigma_1(0)$ la
 réponse de P_1 . $0 \text{ } v_0 \text{ } u_1 \dots$

Poursuivons maintenant ("val de stratégie")

$$u'_0 = 1 \text{ } v_0 \quad (P_0 \text{ joue})$$

$$\underbrace{1 \text{ } v_0}_{u'_0} \quad v'_0 \quad u'_1$$

$P_0 \quad P_1 \quad P_0 \text{ joue } \sigma_1$

P_0 joue σ_0 :

- premier coup : $1 \text{ } v_0$
- à partir du 2ème coup : σ_1

Pour le mot $\alpha' = (1 \text{ } v_0) \overset{P_1}{(v_0)} (u'_1) \dots$:

on a le parti $\alpha = (0) \underset{P_1}{(v_0)} (v'_0) \underset{P_1}{(u'_1)}$

où P_1 joue σ_1 , donc

α est gagné par P_1 . $\rightarrow f(\alpha) = 0$

α' est gagné par P_0 : $f(\alpha') = 1$

Donc, σ_1 n'est pas stratégie geyante
pour $P_1 \rightarrow$ contradiction.

Pour les jeux infinitaires il y a
une classe de conditions de victoire
 $\rightarrow$ conditions de Borel
pour laquelle on sait que les jeux
sont déterminés.

Borel

On déf. une topologie sur $\{0, 1\}^{\omega}$.

$$d(w, w') = 2^{-(n+1)} \quad , \text{ où}$$

n = longueur maximale d'un
préfixe commun de w, w'

ex $w = w' \quad d(w, w) = 2^{-\infty} = 0$

$$w = 0u \quad , \quad w' = 1u'$$

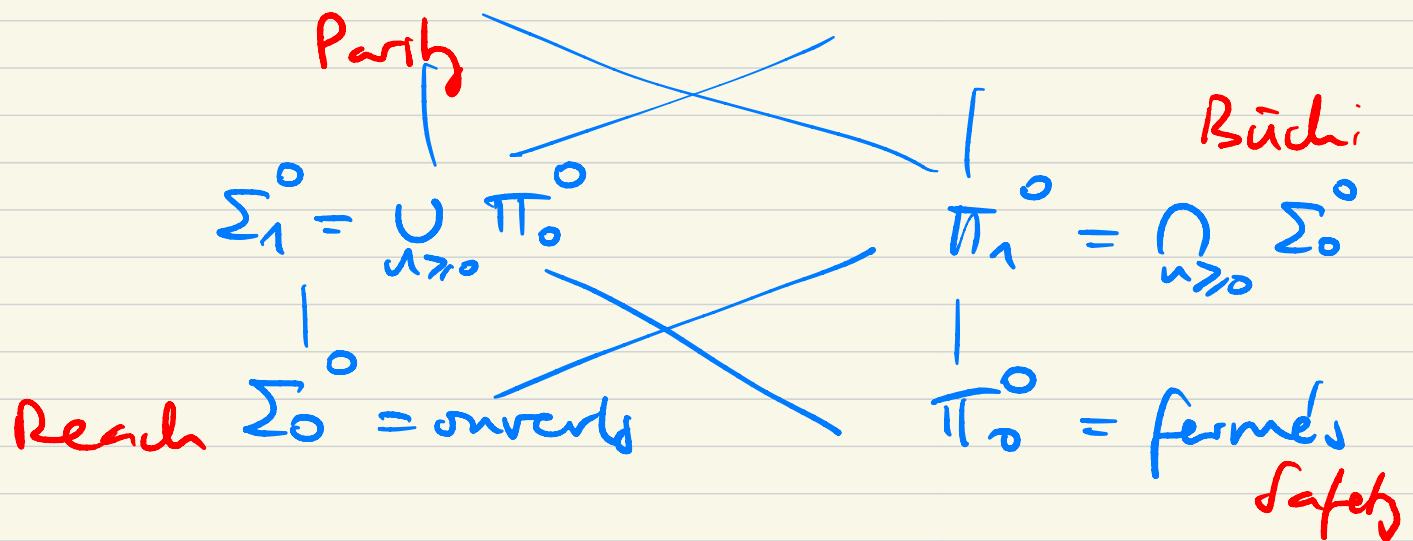
$$d(w, w') = \frac{1}{2} \text{ etc.}$$

Ouverts : $X \cdot \{0,1\}^\omega$ $X \subseteq \{0,1\}^*$

les ensembles boréliens sur $\{0,1\}^\omega =$
 la plus petite classe de sous-
 ensembles de $\{0,1\}^\omega$ qui

- contient les ouverts et les fermés
- est fermée par $\bigcup_{n \geq 0}$ et $\bigcap_{n \geq 0}$.

Hiérarchie de Borel :



Th (Mach) Tout jeu avec
 condition de victoire = ens.
 de Borel est déterminé.