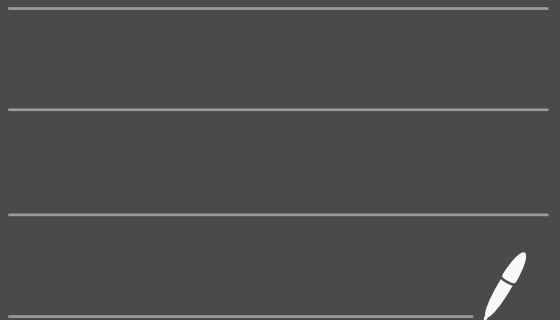


cr - automata, Büchi games



Aujourd'hui : jeux infinitaires —
Buchi, parity

Jeux finitaires : Reach, Safety, obligatoric
↓
weak parity
étaient visités au cours d'une partie

Infinitaires : on parle de nb. infini
de visites

Ex Conditions d'équité (en vérification)
par exemple :- une ressource demandée
sera acquise

— chaque fois qu'une ressource
est demandée, elle sera acquise
plus tard → propriété non-
rythmée

- approximation (équité forte)

une ressource demandée ω -souvent
sera acquise ω -souvent

$\leadsto$ propriétés ω -régulières

$\hat{=}$ propriétés sur des séquences
infinies (ω -words) à l'aide
d'automates finis

les 2 prochains cours : jeux avec
condition de victoire exprimée par
un ω -régulier

$\rightarrow$ jeux de parité $\hat{=}$

jeux qui ont la forme la
plus générale des jeux
 ω -réguliers

Mots infinis

A alphabet, mot infini $w = a_0 a_1 \dots$

$A^\omega =$ ensemble des mots infinis $f: \mathbb{N} \rightarrow A$

$L \subseteq A^\omega$ langage de mots infinis

Ex $A = \{a, b\}$

$\text{Inf}(a) = (b^* a)^\omega$ (mot w
tq. $|w|_a = \infty$)

$A^\omega \setminus \text{Inf}(a) = \text{Fin}(a) = (a+b)^* b^\omega$

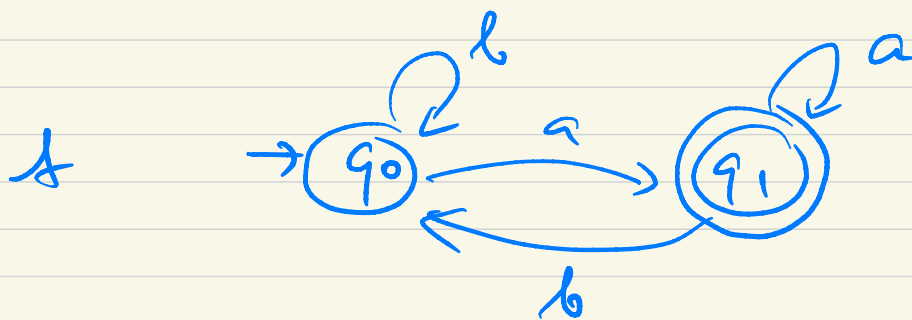
Automates de Büchi :

$A = (Q, A, \delta, q_0, F)$
 $\delta \subseteq Q \times A \times Q$

$f: q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots$ acceptant
 $\Leftrightarrow \exists^\infty n: q_n \in F$

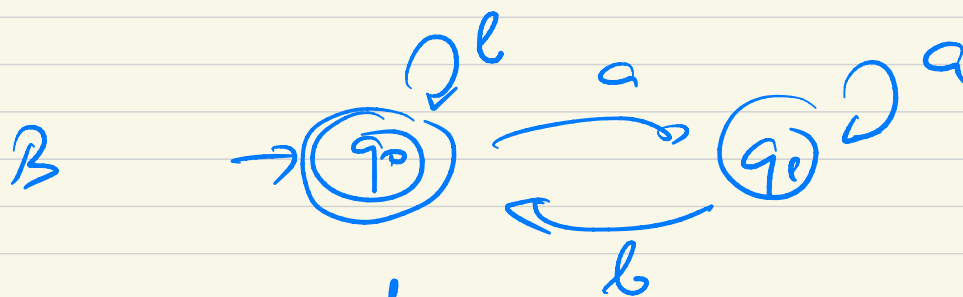
$L(A) = \{ w \in A^\omega \mid \exists f \text{ acc. sur } w \}$

$\text{Inf}(a)$ est ω -régulier :

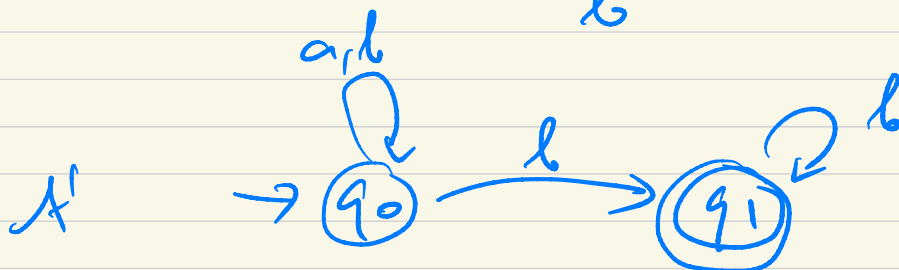


$$[q_1] = F$$

$$L(A) = \text{Inf}(a)$$



$$L(B) \neq \text{Fin}(a)$$



$$L(A') = \text{Fin}(a)$$

il n'existe pas d'automate de
Büchi déterministe qui acc. $\text{Fin}(a)$

Def L est ω -régulier si $L = L(A)$,
 A aut. de Büchi (non-dét.)

Rq 1) Si L est ω -régulier, alors
 $A^\omega \setminus L$ est ω -régulier.

2) Pour déterminer aut. de Büchi :
 $\rightarrow$ automates de parité

$$A = (Q, A, q_0, \delta, p : Q \rightarrow \{0, \dots, K\})$$

$$p(q) = \text{priorité de } q \in Q$$

$$\delta : Q \times A \rightarrow Q \quad \text{dét.}$$

$q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots$ est acceptante

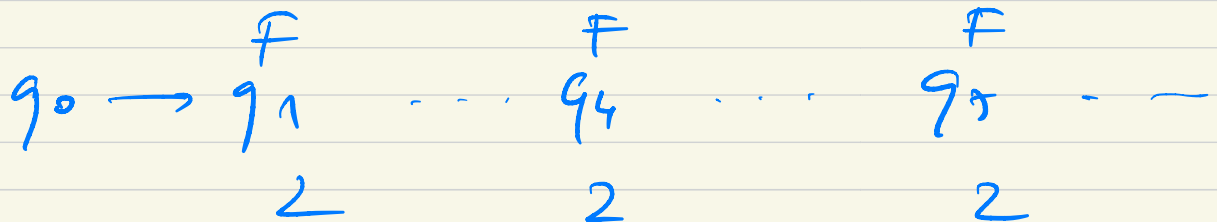
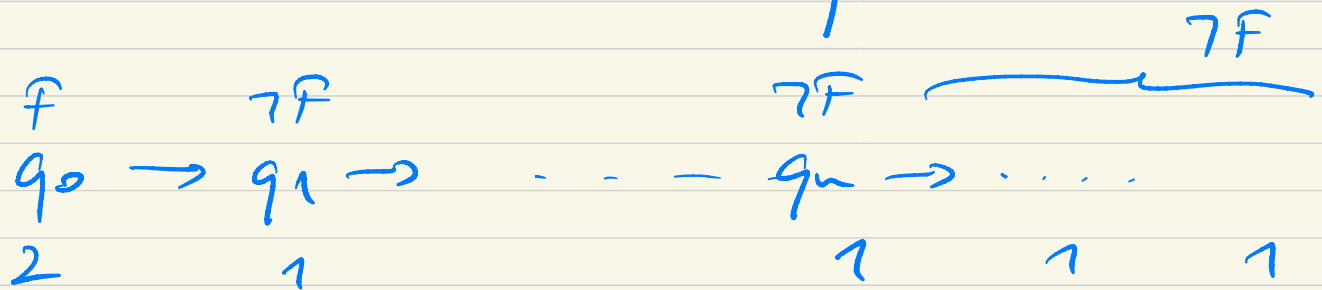
si $\max \{c \mid \exists^\infty n : p(q_n) = c\}$
est paire

Rq Büdi est cas particulier de Parity

$\downarrow$
 $\downarrow$

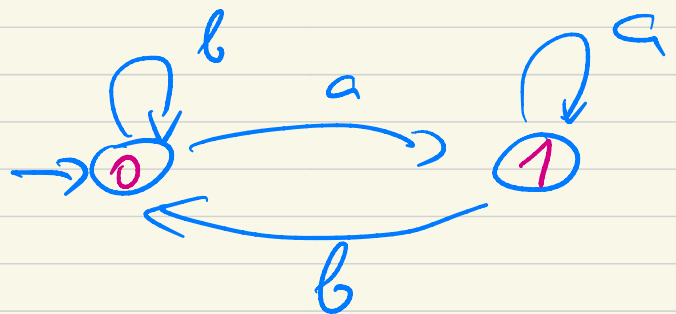
F
 P

$$P(q) = \begin{cases} 2 & \text{si } q \in F \\ 1 & \text{si } q \notin F \end{cases}$$



Th Tout langage $L \subseteq A^w$ w -rég.
 peut être accepté par un aut.
dét. de parité.

ex. $\text{Fin}(a)$



Jeux de parité

Arène (V_0, V_1, E) $E \subseteq V \times V$

Fct. de priorité

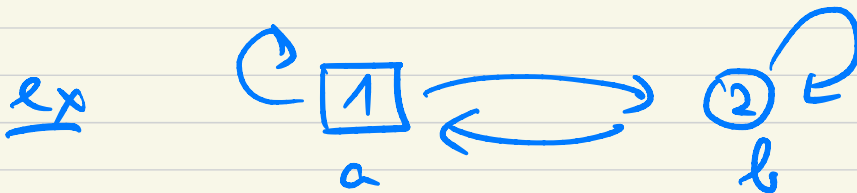
$$p: V \rightarrow \{0, \dots, K\}$$

Rq On suppose que chaque sommet a au moins 1 successeur

→ parties maximales typ. infinies

Une partie $\pi: v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$

est gagnée par P_0 si la priorité maximale visitée ∞ -souvent dans π est paire.



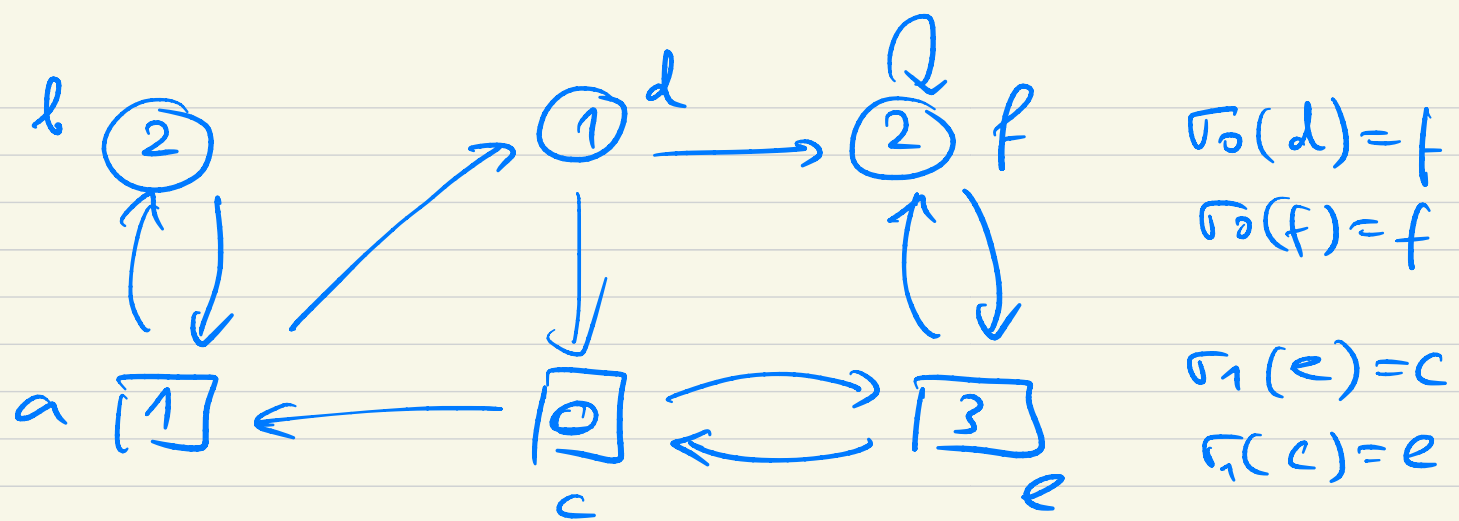
$$p(a) = 1$$
$$p(b) = 2$$

$\pi: b \rightarrow b \rightarrow b$

prio. max = 2
 ∞ -souvent = 2

$\pi': b \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow \dots$

2
 ∞ 1



$$p(a) = 1, \quad p(b) = 2, \dots$$

d, f gagnent pour P_0 : P_0 reste dans f

c, e gagnent pour P_1 : P_1 va
cycler entre c, e

a, b gagnent pour P_0 : soit

P_1 fait $a \rightarrow b$, ou $a \rightarrow d$
($\rightarrow f$)

$$W_0 = \{a, b, d, f\}$$

$$W_1 = \{c, e\}$$

Cas spécial : $K=1$

$\rightarrow$ 2 priorités : 1 et 2

$\pi: v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$

π est gagnée par $P_0 \iff$

priorité max. utilisée ∞ -souvent = 2

$\iff \pi$ passse ∞ -souvent par

$F := \{v : p(v) = 2\}$

Jeu d'accessibilité répétée
= jeu de Büchi

- P_0 gagne π si π passe par F
 ∞ -souvent, et (Büchi)
- P_1 gagne π si π passe par F
finitement souvent (co-Büchi)

$\underbrace{v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots}_{\text{finitement souvent}} \mid \underbrace{v_n \rightarrow \dots}_{\infty \text{-souvent}}_{\neg F}$

Première solution par les jeux de Büchi

Bündel (V, E, F)

Entrée : (V_0, V_1, E) , $F \subseteq V$

Sortie : régions adjacentes W_0, W_1
 $\subseteq V$
 (+ strat. adjacentes)

$X := V \setminus \text{Albr}_0(F) \quad // X \subseteq W_1$
 $Y := \text{Albr}_1(X) \quad // Y \subseteq W_1$

if $X = \emptyset$ then $W_0 = V$, $W_1 = \emptyset$
else Būchi $(V - Y) =: (W'_0, W'_1)$
return $(W'_0, W'_1 \cup Y)$

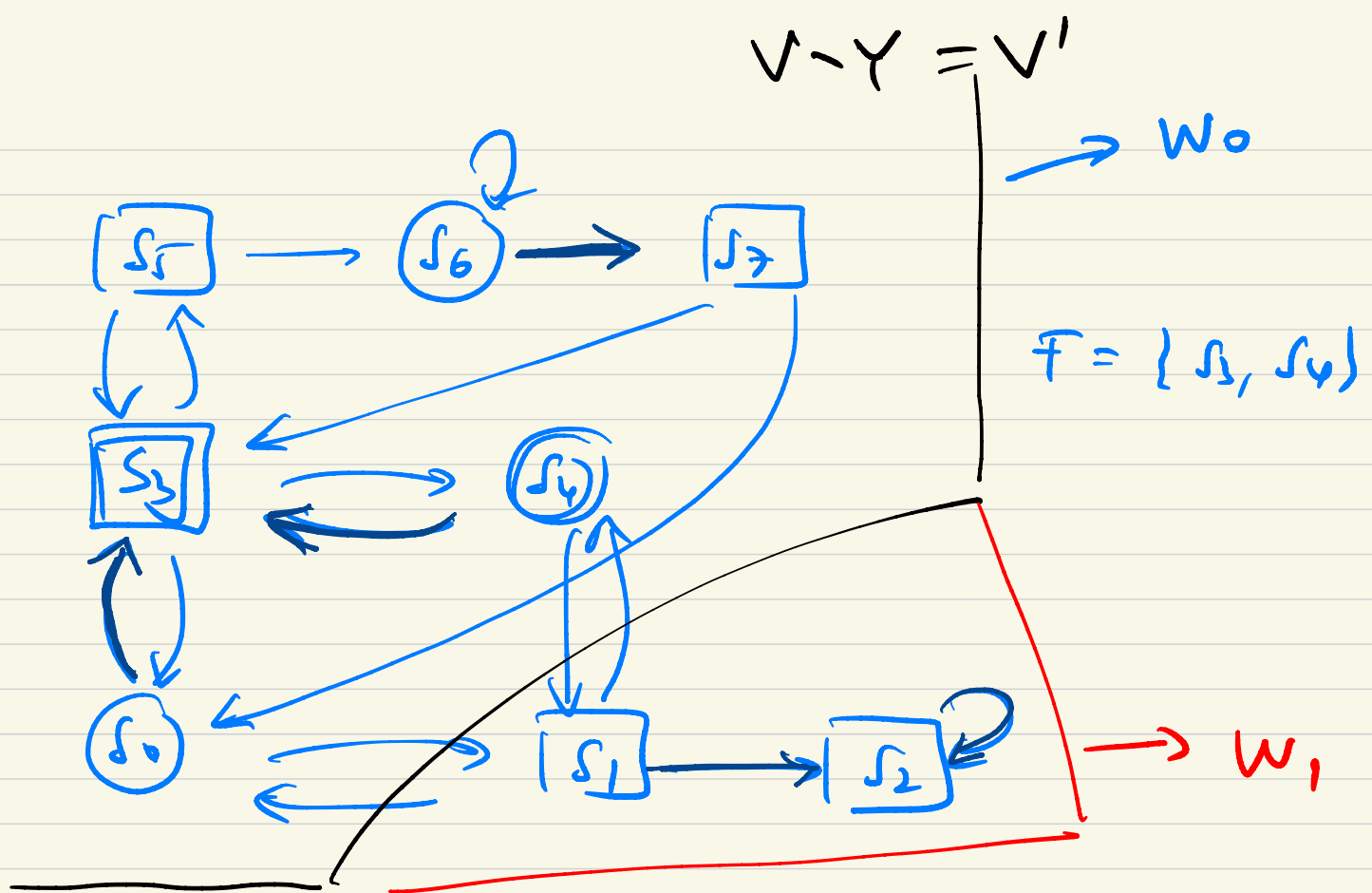
$\downarrow$ $\downarrow$
 W_0 W_1

Complexité : $O(n \cdot (m+n))$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

appels structure

$|E| = m$
 $|V| = n$



$$\text{Attr}_0(s_3, s_4) = \{s_3, s_4, s_0, s_7, s_6, s_5\}$$

$$X = V \setminus \text{Attr}_0(s_3, s_4) = \{s_1, s_2\}$$

$$Y = \text{Attr}_1(X) = \{s_1, s_2\}$$

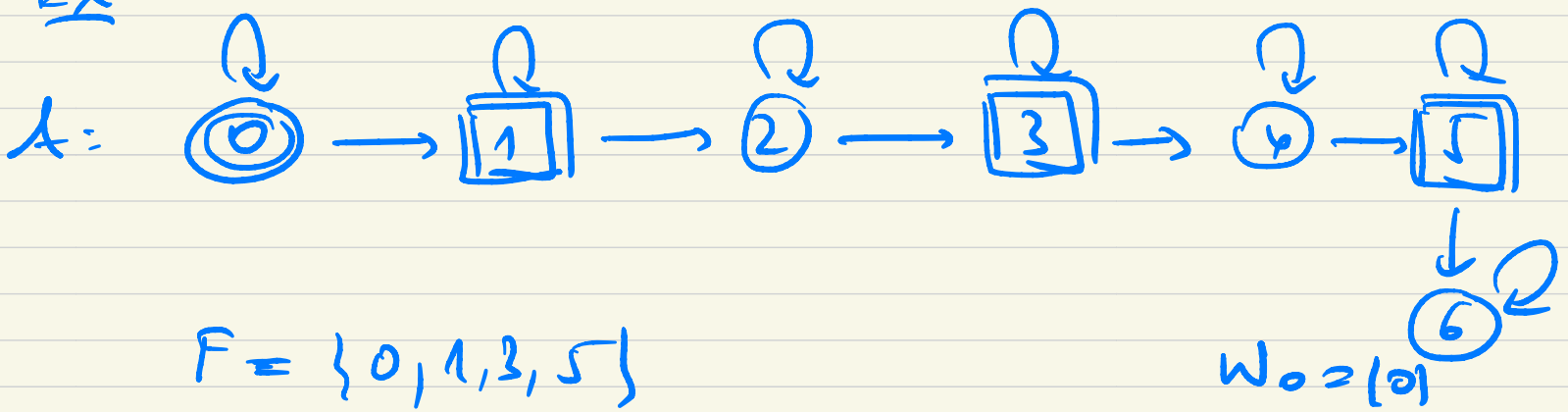
Büchi sur l'arène induite par $V \setminus Y$

$$X' = \emptyset$$

sur l'arène induite par V' ,
tout est segment pour $P_0 \rightarrow$

$$w'_0 = V'$$

Ex



$$X^{(1)} = \{6\}, \quad Y^{(1)} = \{5, 6\}$$

$$W_0 = \{0\}$$
$$W_1 = V - \{0\}$$

$$A^{(1)} = A - \{5, 6\}$$

$$W_0^{(1)} = \{0\}$$

$$W_1^{(1)} = \{1, \dots, 4\}$$

$$X^{(2)} = \{4\}, \quad Y^{(2)} = \{3, 4\}$$

$$A^{(2)} = A^{(1)} - \{3, 4\}$$

$$W_0^{(2)} = \{0\}$$

$$W_1^{(2)} = \{1, 2\}$$

$$X^{(3)} = \{2\}, \quad Y^{(3)} = \{1, 2\}$$

$$A^{(3)} = A^{(2)} - \{1, 2\}$$

$$W_0^{(3)} = \{0\}, \quad W_1^{(3)} = \emptyset$$

Th Bâdi calcule correctement les régions gagnantes.

On le montre par récurrence.

Si $V = \emptyset$ alors $W_0 = W_1 = \emptyset$

Si non :

- si $X = \emptyset = V \setminus \text{Attr}_0(F) \Rightarrow$

$$\forall v \in V : v \in \text{Attr}_0(F)$$

Donc si P_0 joue la stratégie d'attraction : elle est toujours capable d'arriver dans F , à partir de n'importe quel sommet.

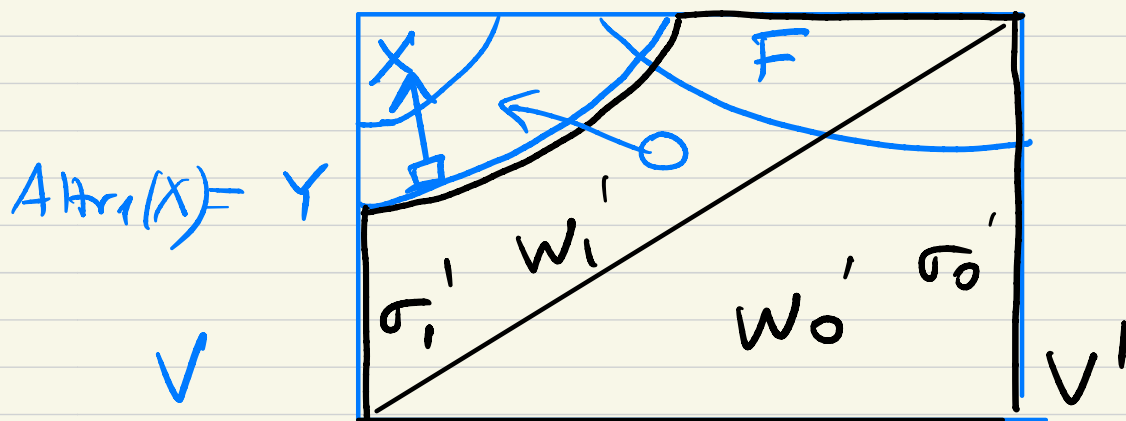
$\Rightarrow P_0$ garantit de cette façon de visiter F ∞ - souvent

- si $X \neq \emptyset$: appel réc.
Bâdi (V, ψ)

Par récurrence, l'appel réc. $\text{Bach}(V \setminus Y)$ calcule les régions gagnantes W_0', W_1' sur la sous-arène $V \setminus Y$, et

$$V \setminus Y = W_0' \dot{\cup} W_1' \quad (\text{jeu est dit.})$$

Stratégies gagnantes σ_0', σ_1' de P_0 , resp. P_1 , sur W_0', W_1' .



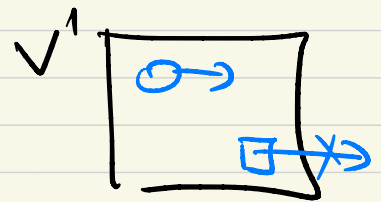
$$W_0 = W_0' \quad , \quad \underline{W_1 = W_1' \cup Y}$$

sur W_1 : dans Y , P_1 gagne avec la stratégie d'attracteur qui le mène vers X . Dès que le jeu arrive dans X , P_1 joue la stratégie de piège pour y rester.

Dans W_1' , P_1 joue σ_1' . Si le jeu reste dans W_1' , ça sera gagné par P_1 (récurrence). Si le jeu va dans Y (à cause de P_0), P_1 va jouer la stratégie sur Y , et gagner.

$$\Rightarrow \boxed{Y \cup W_1' \subseteq W_1}$$

$$\boxed{W_0' \subseteq W_0}$$

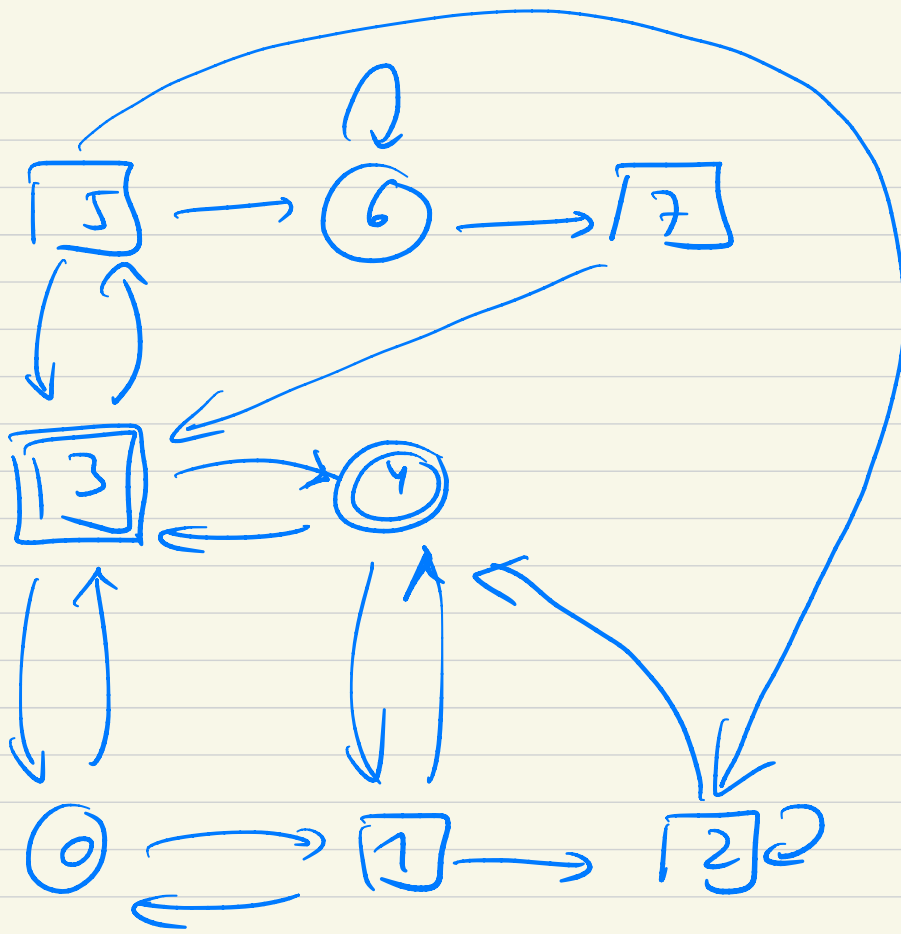


car $V \setminus Y$ est piège pour P_1

Donc, en appliquant σ_0' , P_0 gagne sur $W_0' = W_0$.

En particulier, on a :

- $V = W_0 \cup W_1$ (jeu déterminé)
- strat. positionnelles :
 σ_0' pour P_0 , σ_1' / attracteur pour P_1



$$X = V \setminus \text{Altr}_0(3,4) = V \setminus \{3,4,6,7,0\} \\ = \{1,2,5\}$$

$$Y = \text{Altr}_1(\{1,2,5\}) = \{1,2,5,3,0,7\}$$

$$V' = \{4,6\}$$

$$\text{Altr}_0(Y) = \{4\}, \quad X' = \{6\} = Y'$$

$$w'_0 = \emptyset, \quad w'_1 = \{4,6\}$$

$$w_0 = \emptyset, \quad w_1 = V$$

2. Solution

$$\text{Attr}_0^+(F)$$

attracteur strict de P_0
vers $\overline{F}$

= ens. des sommets à partir desquels
 P_0 peut garantir d'arriver dans

F en 1 ou plus coups → donc le
premier sommet ne compte pas!

On calcule des ensembles décroissants:

$$\begin{cases} X_0 := V \\ X_{n+1} := \text{Attr}_0^+(F \cap X_n) \end{cases}$$

$$X_1 \subseteq X_0$$

$$X_2 \subseteq X_1$$

$\vdots$

$$\begin{cases} X_2 = \text{Attr}_0^+(F \cap X_1) \\ X_1 = \text{Attr}_0^+(F \cap X_0) \end{cases}$$

$$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n = X_{n+1}$$

$$X := \bigcap_{n \geq 0} X_n = X$$

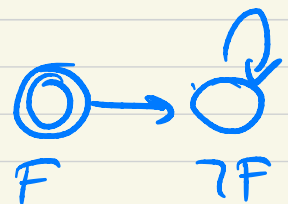
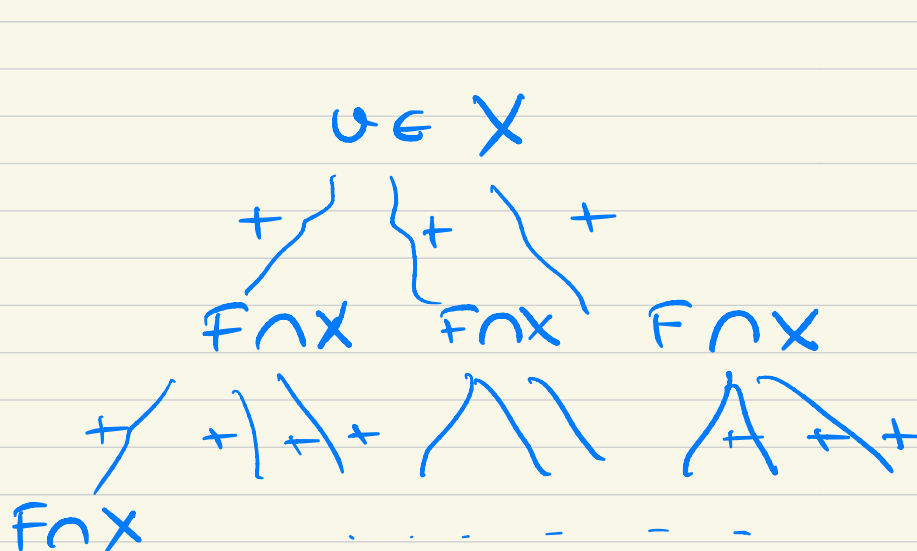
On montre :

$X = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ est la région gagnante de P_0 dans le jeu de Büchi.

$$X_0 = V, \quad X_{n+1} = \text{Attr}_0^+(F \cap X_n)$$

Par déf. : $\boxed{X = \text{Attr}_0^+(F \cap X)}$

$$\left(\begin{array}{l} X_n = X_{n+1} = \text{Attr}_0^+(F \cap \underbrace{X_n}_X) \\ \hline \Rightarrow X \end{array} \right)$$

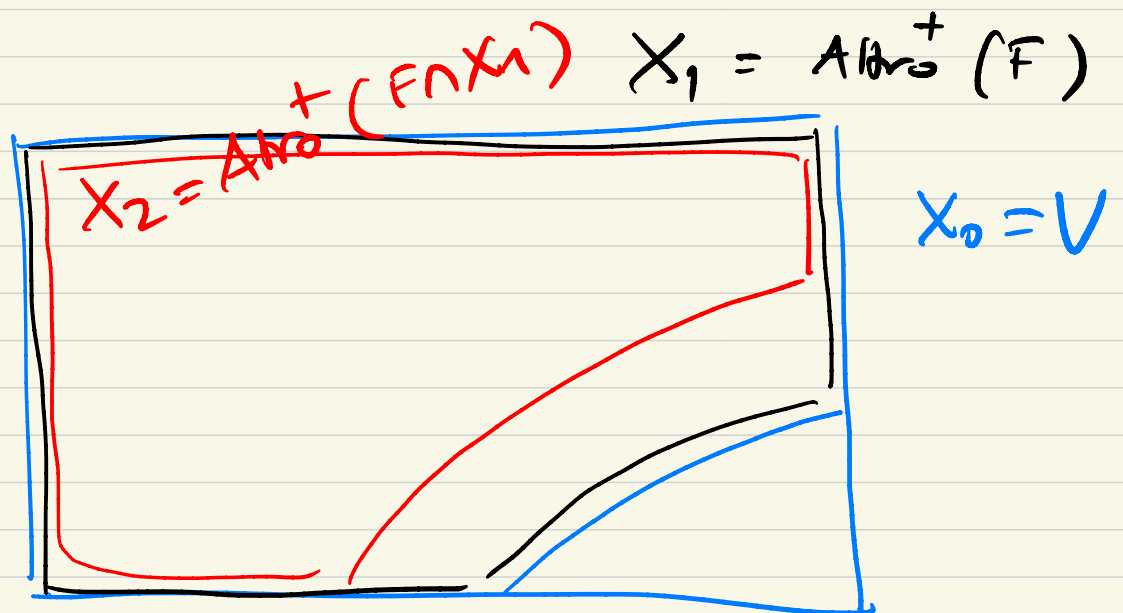


Donc à partir de X , si P_0 joue la stratégie d'attr. strict vers $F \cap X$
 $\Rightarrow P_0$ garantit de voir F ∞ -souvent

$$\Rightarrow X \in W_0$$

Il reste à montrer : $V \setminus X \in W_1$

$$X = X_n = X_{n+1} = \text{Alt}_0^+(F \cap X_n)$$



On peut montrer par induction sur $k \geq 0$:

$v \in X_k \Leftrightarrow$ à partir de v

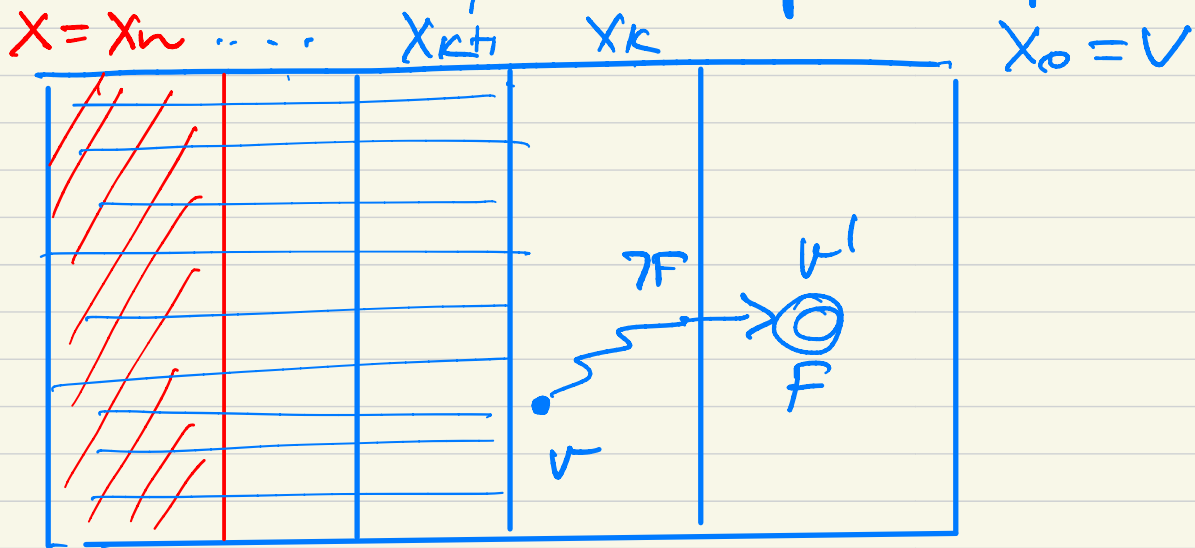
P_0 peut garantir de visiter F

au moins k fois (sans compter v)

$\forall K:$

$$v \notin X_{K+1} = \text{Attr}_0^+(X_K \cap F)$$

$\Leftrightarrow P_1$ a stratégie pour éviter $X_K \cap F$ en 1 ou plus coups à partir de v

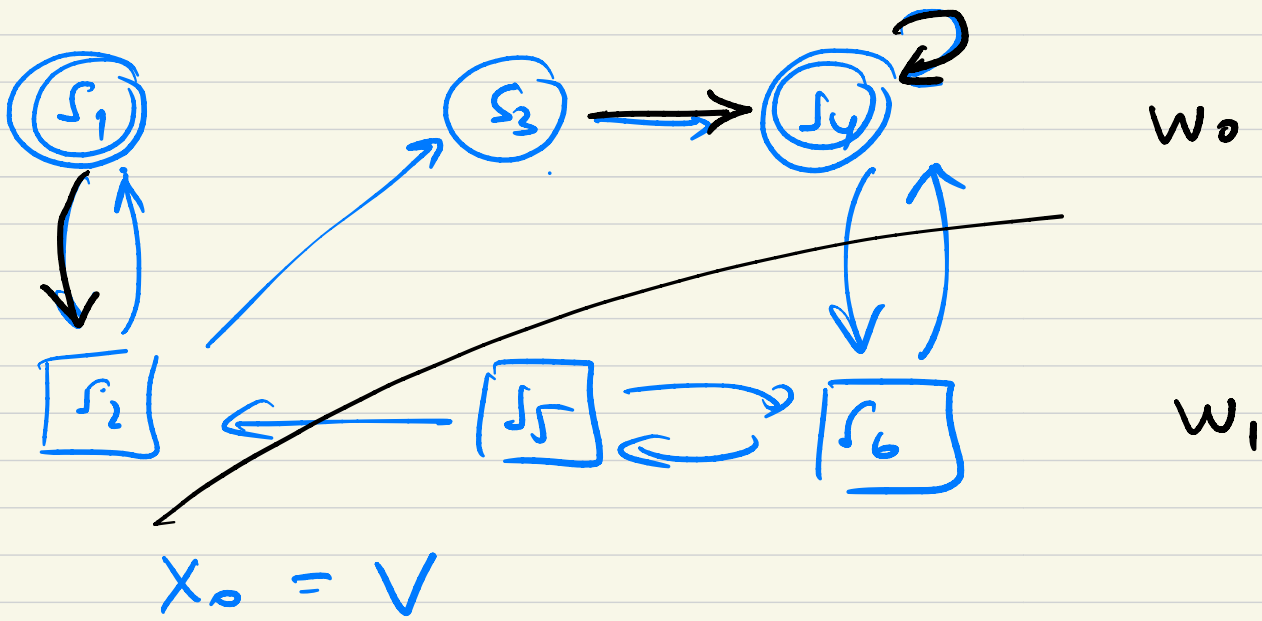


P_1 joue cette stratégie : si une partie arrive dans $v' \in F$ alors $v' \notin X_K$

Par induction : à partir de v' , P_1 a stratégie pour visiter $F < K$ fois

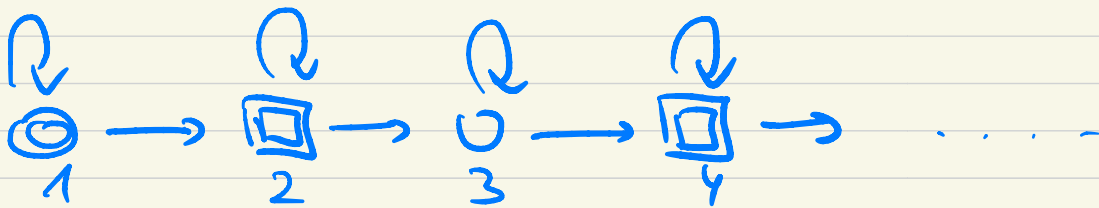
$\Rightarrow$ à partir de v , P_1 a stratégie pour visiter $F < K+1$ fois

Ex



$$X_1 = \{s_3, s_4, s_1, s_2\} = X_2$$

Ex (jeu infini)



$$\text{Attr}_0^+(F) = V$$

$$\Rightarrow w_0 = V, \quad w_1 = \emptyset$$