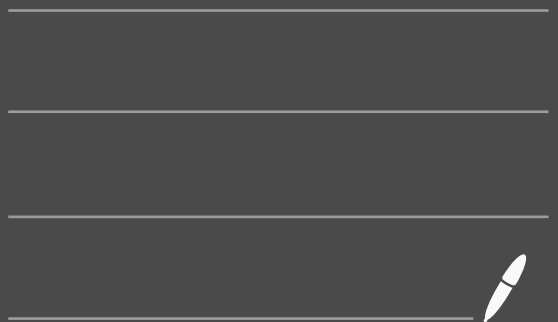


Strategic games



Jeux stratégiques / matriciels

- plusieurs joueurs
- jeux concurrents (à la pierre-feuille-ciseaux)
- gain / pertes, équilibres de Nash
- pas nécessairement à somme nulle
- jeux non-coopératifs

Joueurs $\{1, \dots, n\}$

Def Jeu stratégique $G = (S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$

- S_i = ens. fin de stratégies pour joueur i
- p_i : payoff, $p_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$ du joueur i

les stratégies sont choisies simultanément.

On note $s = (s_1, \dots, s_n)$
 $1 \leq i \leq n$ $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$

Les joueurs sont rationnels : ils veulent maximiser leur gain individuel ;
 ils connaissent les s_i, p_i .

Ex 1) Prisoner's dilemma

$s_1 = s_2 = \{C, D\}$

C : cooperate (se faire) D : defect (pas le faire)

2 \ 1	D	C
D	-2, -2	0, -3
C	-3, 0	-1, -1

$$p_1(C, D) = -3$$

$$p_2(C, D) = 0$$

Nash

Pareto

2) Battle of sexes

2 \ 1	F	B
F	2, 1	0, 0
B	0, 0	1, 2

1) et 2) : pas somme nulle

3) Matching pennies

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

jeu à somme nulle

On essaie d'identifier les meilleures stratégies :

- Si s'appelle "meilleure réponse" par rapport à une stratégie s_{-i} des autres si

$$\forall s_i' \in S_i : p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s_i', s_{-i})$$

- $s = (s_i)$ s'appelle équilibre de Nash si chaque s_i est "meilleure réponse" à s_{-i} .

(personne n'a l'intérêt de changer sa stratégie de façon unilatérale)

- on appelle $s = (s_i)_i$ Pareto efficace

si pour aucune $s' = (s'_i)_i$ on a :

$$\forall i \quad p_i(s') \geq p_i(s) \quad \text{et}$$

$$\exists i \quad p_i(s') > p_i(s)$$

Stratégies dominantes

- $s_i, s'_i \in S_i$

s_i domine strictement s'_i si

$$\forall \underline{s}_{-i} \in S_{-i} : p_i(\underline{s}_i, s_{-i}) > p_i(\underline{s}'_i, s_{-i})$$

s_i domine faiblement s'_i si

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s'_i, s_{-i})$$

et $\exists s_{-i} \in S_{-i} :$

$$p_i(s_i, s_{-i}) > p_i(s'_i, s_{-i})$$

s_i domine s'_i si

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} : p_i(s_i, s_{-i}) \geq p_i(s'_i, s_{-i})$$

- s_i s'appelle strictement / faiblement dominante s_i pour toute $s_i' \neq s_i$:
 s_i domine strictement / faiblement s_i'

Rq Un joueur rationnel ne va jamais choisir une stratégie qui est strictement dominée.

Primer's dilemma : C ou D ?

C est strictement dominée par D

→ le choix rationnel est de jouer D

Rq Supposons que $s = (s_i)$ est tq. chaque s_i est dominante. Alors s est équilibre de Nash. (converse?)

Car $\pi_i(s_i, s_{-i}) \geq \pi_i(s_i', s_{-i})$, $\forall i$

Ex

$1 \backslash 2$	L	R
T	(1,1)	(1,1)
B	(1,1)	0,0

T ? B T domine faiblement B,
L domine faiblement R

Si on enlève les stratégies faiblement
dominées, donc B et R, on obtient
(T, L) : équilibre de Nash

Algorithmes pour calculer des équilibres
de Nash (s'il y en a)

① Élimination des stratégies dominées
strictement (i.e. SDS - iterative
elimination of strictly dominated
strategies).

$G = (S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$
→ restrictions $R_i \subseteq S_i$
 $\emptyset \neq$

$G' = (R_1, \dots, R_n, p_1, \dots, p_n)$ restriction de G

$G \rightarrow G'$ si $\forall i, R_i \subseteq S_i$ satisfait

$\forall S_i \in S_i \setminus R_i \exists S_i' \in R_i$ tq.
 S_i est strictement dominée
 par S_i'

Ex

1 \ 2	L	M	R
T	3, 0	2, 1	1, 0
C	2, 1	1, 1	1, 0
B	0, 1	0, 1	0, 0

unique
 eq. de
 Nash

B ? T T domine str. B

R ? M M ——— R

On élimine B, R :

	L	M
T	3, 0	2, 1
C	2, 1	1, 1

T domine
 strict. C

	L	M
T	3, 0	2, 1

On élimine C :

.. On élimine L :

IESDS: on élimine les stratégies strictement dominées, tant que c'est possible.

Si à la fin on obtient exactement une stratégie pour chaque joueur, alors on dit que IESDS réduit le jeu G .

Le jeu G' obtenu par IESDS à partir de G s'appelle résultat de IESDS sur G .

Th (IESDS)

Soit $G' = (R_1, \dots, R_n, p_1, \dots, p_n)$ un résultat de IESDS sur

$$G = (S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n).$$

- 1) Si s est eq. de Nash pour G , alors s est eq. de Nash pour G' .
- 2) Si G est fini et s est eq. de Nash de G' , alors s est eq. de Nash de G .

3) Si G est fini et résolu par IESDS, alors l'unique stratégie restante est l'unique eq. de Nash pour G .

démo

1) soit s eq. de Nash pour G

Que sait-on sur les s_i ?

s_i ne peut pas être strict. dominée par une autre stratégie s_i' (Nash)

Donc s_i ne sera jamais éliminée.

2) supposons que $G \rightarrow G'$ en éliminant une stratégie s_i' , parce que s_i' est strict. dominée par s_i'' . Prenons $s = (s_i)$: eq. de Nash de G' .

$$p_i(s_i', s_{-i}) \overset{s.d.}{<} p_i(s_i'', s_{-i}) \overset{eR_i}{\leq} p_i(s_i, s_{-i}) \overset{\text{Nash de } G'}{\leq}$$

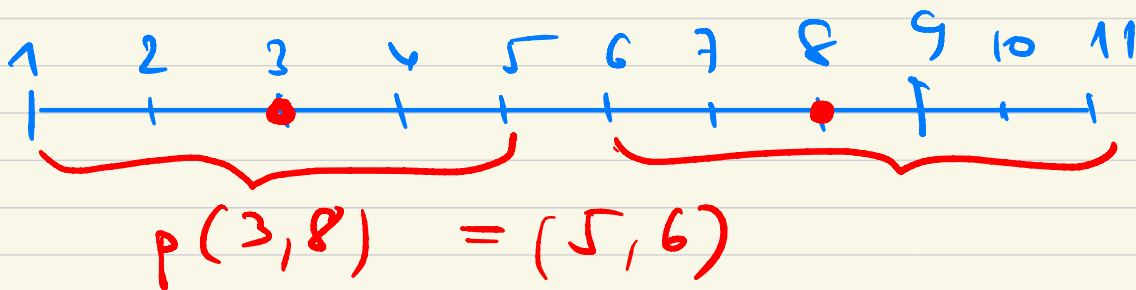
Donc $s = (s_i)$ est eq. de Nash de G .

Ex Location game (1929)

Joueurs : 2 vendeurs qui choisissent une adresse. Les clients vont s'adresser au vendeur qui est le plus proche :

Adresses : $i \in \{1, \dots, n\}$

A chaque adresse se trouve exact.
1. client.



$$p_1(3, 8) = 5, \quad p_2(3, 8) = 6$$

Si un client est à dist. égale des
2 vendeurs $\rightarrow$ on partage le gain $1/2$

$$p_i(s_i, s_{3-i}) = \begin{cases} \frac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i < s_{3-i} \\ n - \frac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i > s_{3-i} \\ \frac{n}{2} & s_i = s_{3-i} \end{cases}$$

$i \in \{1, 2\}$

$$p_i(s_i, s_{3-i}) = \begin{cases} \frac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i < s_{3-i} \\ n - \frac{s_i + s_{3-i} - 1}{2} & s_i > s_{3-i} \\ \frac{n}{2} & s_i = s_{3-i} \end{cases}$$

$i \in \{1, 2\}$

$$s_1 = 1, \quad s_2 \in \{1, \dots, n\}$$

$$\begin{aligned} p_1(1, s_2) & \quad p_1(2, s_2) = \\ = \begin{cases} s_2/2 & \text{si } 1 < s_2 \\ n/2 & s_2 = 1 \end{cases} & \begin{cases} (s_2+1)/2 & 2 < s_2 \\ n/2 & 2 = s_2 \\ n-1 & s_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$s_1 = 1$ est str. dom. par $s_1' = 2$, si $n \geq 3$
 ($s_1 = n \rightarrow \text{---}$ par $s_1' = n-1$)

$n = 2k+1$: le jeu est résolu
 par IESDS en k rounds, et
 la stratégie qui survit est
 $s = (k, k)$. $\rightarrow$ unique eq. de
 Nash du jeu.

Q: Est-ce que l'ordre pour éliminer les strct. strict-dominées est important ?

Non: étant donné un jeu $\boxed{fni}$,
l'algorithme iEDS produit le même
résultat, quelque soit l'ordre de
l'élimination.

Rq. L'hypothèse $\boxed{fni}$ est importante,
aussi pour les conclusions (2) et (3)

Ex $S_i = N = \{0, 1, \dots\}$

$$p_i(s) = s_i$$

$\forall s_i \neq s_i'$ tq. s_i est str. dominé
par s_i'

$s_i \in \text{iEDS}$

- élimine toutes les strct. str.
dominées d'un coup $\rightarrow \emptyset$

- élimine toutes les stratégies strict-dominées sauf $s_i = 0, \forall i$
→ un unique résultat $s = 0$,
n'est pas éq. de Nash
- élimine les st. strict-dominées une par une, alors l'algo ne termine pas

$$S_{-i} : (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

Algorithme IEWDS (iter. elm. of weakly dom. strategies) :

→ on élimine les stratégies faiblement dominées

ex Matching Pennies* (MP: pas de eq. Nash)

	H	T	E
H	1, -1	-1, 1	-1, -1
T	-1, 1	1, -1	-1, -1
E	-1, -1	-1, -1	-1, -1

Nash

E vs. H, T ?

H, T domine faiblement E (pas strict.)

IEWDS élimine les stratégies E

→ il élimine le seul eq. de Nash ☹

Th [IEWDS]

soit G jeu fini.

(i) Si $G \xrightarrow{*} G'$ et s est éq. de Nash de G' , alors s est éq. de Nash de G .

(ii) Si $G \xrightarrow{*} G'$ et G' a une unique stratégie pour chaque joueur, alors cette stratégie $s = (s_i)_i$ est un éq. de Nash pour G (pas nécessairement unique).

Ex

1 \ 2	L	M	R
T	(0, 1)	1, 0	0, 0
B	(0, 0)	0, 0	(1, 0)

Comparer L, M, R ?

L domine faibl. M, R

1) Eliminer M, R :
→ 2 éq.

	L
T	(0, 1)
B	(0, 0)

2) Éliminer R :

	L	M
T	0,1	1,0
B	0,0	0,0

Comparer B, T ?
T domine f. B

→ éliminer B :

	L	M
T	0,1	1,0

L domine f. M

→ éliminer M →

(T, L)

unique réponse

IEWDS :

- le résultat dépend de l'ordre d'élimination
- on peut perdre des eq. de Nash
- il se peut qu'on n'a pas un résultat unique à la fin.

Ex (IEWJDS)

Beauty contest game (Moulin 1986)

$n > 2$ joueurs

chaque joueur choisit $nb. \in \{1, \dots, 100\}$

$$\rightarrow s_i = \{1, \dots, 100\}$$

paiement $p_i =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } s_i \text{ n'est pas parmi les} \\ & \text{valeurs les plus proches} \\ & \text{de } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n) \\ \frac{1}{K} & \end{cases}$$

donc
si $K = nb. \text{ des } s_j$
les plus proches de
 $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n)$

$$n = 3$$

$$s_1 = 29, s_2 = 32, s_3 = 29$$

$$\frac{1}{3}(29 + 32 + 29) = 30$$

$$\frac{2}{3} \cdot 30 = 20$$

$$\rightarrow p_1 = p_3 = \frac{1}{2}, \quad p_2 = 0$$

On montre que iEWSI résout ce jeu, et qu'il faut avec la stratégie $(1, 1, \dots, 1)$

thm $(1, 1, \dots, 1)$ est éq. de Nash

On peut vérifier: $s_1 > 1$ est dominé faibl.
par $s_1' = 1$

$$p_1(s_1, \bar{1}) < p_1(1, \bar{1}) = \frac{1}{n}$$

$$p_1(s_1, s_{-1}) \leq p_1(1, s_{-1})$$

Quelles strat. sont surement éliminables?

Quand les joueurs choisissent entre 1 et 100, la moyenne avg:

$$1 \leq \text{avg} \leq 100$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{2}{3} \text{avg} \leq \frac{200}{3}$$

$\leadsto$ Si le joueur i propose
 $s_i > \frac{200}{3} \rightarrow$ paiement sera 0

Donc, iEWSDD peut éliminer toutes les stratégies si $s_i > \frac{200}{3}$.

Après : $1 \leq \text{avg}' \leq \frac{200}{3} < 100$

$$1 \leq \frac{2}{3} \cdot \text{avg}' \leq \frac{400}{9}$$

De façon similaire, iEWSDD peut éliminer toutes les stratégies

$$s_i > \frac{400}{9}.$$

$$\text{Etc} \dots 100 > \frac{200}{3} > \frac{400}{9} > \dots \rightarrow 1$$

À la fin il reste seulement $(1, 1, \dots, 1)$.