

Jeux impartiels (ex : Nim)

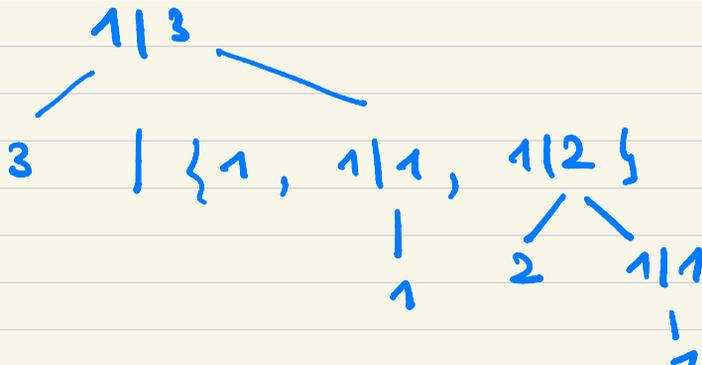
- 2 joueurs turn-based (P_1, P_2)
- parties finies
- impartial : les coups des 2 joueurs sont les mêmes
- le joueur qui est bloqué perd

"Nim-like games":

définition inductive

- $\{\}$ est un jeu (P_1 perd)
- G_1, \dots, G_n jeux \rightarrow
 $G = \{G_1, \dots, G_n\}$ jeu
 P_1 choisit i et joue G_i
- G, H jeux \rightarrow composition parallèle
A chaque coup, le P_i qui joue choisit soit de jouer dans G ou dans H .

Ex Nbr $n_1 = 1, n_2 = 3$



Def G, G' sont équivalents $\iff (G \approx G')$

si $\forall H: G|H$ et $G'|H$ ont le même quotient.

En particulier, G et G' ont le même quotient ($H = \{\}$).

Rq

- \approx est une rel. d'équivalence
- $G|G \approx ?$
- Supposons que P_1 perd dans G .
 $G|H \approx ?$
- Si P_1 perd dans $G|G'$ alors
 $G \approx G'$.

Thm de Sprague - Grundy

Tout jeu "Nim-like" est équivalent à un jeu de Nim avec un seul tas (entier positif):

$$\forall G \exists n_G \text{ tq. } G \approx n_G$$

Par induction structurale sur G :

- $G = \{ \} \quad n_G = 0$ (P_1 perd)
- $G = G_1 | G_2$

On suppose que $G_i \approx n_{G_i}$.

$$\begin{aligned} G_1 | G_2 &\approx n_{G_1} | G_2 \approx n_{G_1} | n_{G_2} \\ &\approx n_{G_1} \text{ XOR } n_{G_2} =: n_G \end{aligned}$$

- $G = \{ G_1, \dots, G_K \}$

On suppose que $G_i \approx n_i$, $\forall i$

$$n_G := \min \{ n : n \notin \{ n_1, \dots, n_K \} \}$$

et on montre: $G \approx n_G$

On doit montrer $\forall H$:

$G \mid H$ et $n_G \mid H$ ont le même gainant
" (d'après P_i)

$\{G_1, \dots, G_k\}$

1. Si P_i joue un coup dans H , alors
c'est le même coup pour $G \mid H$ et
 $n_G \mid H$

2. Si P_i choisit G_j et va dans
 $G_j \mid H$:

a) soit $n_j < n_G$ et P_i joue
 $n_G \mid H \rightarrow n_j \mid H$.

Par (1*i*) : $G_j \mid H$ et $n_j \mid H$ ont le
même gainant

b) ou $n_G < n_j$; l'adversaire
peut jouer $n_j \mid H \rightarrow n_G \mid H$.

P_i gagne $G_j \mid H \Rightarrow P_i$ gagne $n_G \mid H$.

- On a montré :

si P_i gagne $\{G_1, \dots, G_k\} | H$

alors elle gagne $n_G | H$.

- Réciproque :

si P_i gagne $n_G | H$

— elle gagne aussi $G_j | H$

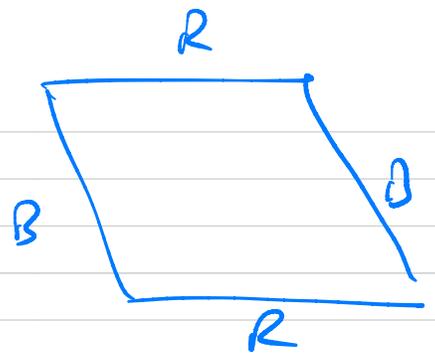
$\forall j \in \mathcal{I}_G$ $n_j < n_G$

— elle gagne aussi $G_j | H$

$\forall j \in \mathcal{I}_G$ $n_j > n_G$

→ variante de Nim où un joueur peut rajouter des jetons à une pile. Cette variante ne change pas le jeu (et la caractérisation des configurations gagnantes), car l'adversaire peut "annuler" ce coup.

HEX



2 joueurs, R et B

- R pose des jetons rouges, B pose des jetons bleus

R et B s'alternent

- R gagne si elle forme une ligne rouge N-S
- B gagne si elle forme une ligne bleue O-E

HEX est un jeu fini.

- 1) On va montrer que HEX n'a pas de partie indéfinie, donc on va conclure que HEX est déterminé.
- 2) On montre que le joueur qui commence (dans R) gagne.

On montre par l'absurde + vol de stratégie que R gagne.

Supposons que B a une stratégie gagnante σ .

- R commence par un coup arbitraire, qu'on marque par X.
- B joue le premier coup
- R continue avec σ

Si σ lui dit de poser le jeton sur X, alors R choisit une autre position libre quelconque, met son jeton, et la marque par X.

Rq. A chaque instant, tous les jetons rouges, sauf X, sont conformes à la stratégie σ .

Problème (1).

Supposons que le tableau est rempli de jetons. Alors on montre que soit il y a une ligne rouge $N-S$ ou une ligne bleue $O-E$.

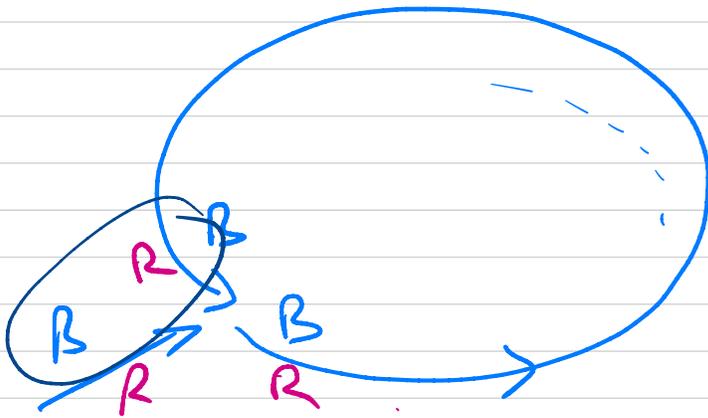
On montre par l'algorithme suivant:

- On commence dans le coin $S-O$.
- On se promène au long des arêtes des hexagones, en respectant l'invariant suivant:
 - la couleur à droite de l'arête doit être R
 - la ... à gauche ...
 - ... B



On veut montrer qu'avec ce parcours on ne forme pas de cycle. Donc, on arrive soit à N (R gauche) ou à E (B gauche)

Pourquoi pas de cycle ?



contradiction