

Nash : complexity



Dernier cours (lemme) :

$m = (m_i)_{i=1}^n$ est éq. de Nash

si $\forall i \forall s_i \forall s_{-i} \in S_{-i}$:

$$p_i(s_i, m_{-i}) \leq p_i(m_i, m_{-i})$$

+ égalité pour $s_i \in \text{supp}(m_i)$.

Toute stratégie pure de l'équilibre m est une "best answer".

1) Conséquence pour les jeux à 2 joueurs :

Si on connaît le support de m on peut, disons avec $|\text{supp}(m_i)| = K_i$, on peut écrire pour chaque i un système d'équations linéaires à m_i inconnues :

$$\sum_{s_i \in \text{supp}(m_i)} m_i(s_i) = 1 \quad + \dots \quad (K_i - 1) \text{ eqs}$$

Ce système peut être résolu en temps polynomial et les solutions sont rationnelles.

→ algorithme NP pour 2 joueurs

2) On peut tester si un $m = (m_i)_i$ donné est équilibre de Nash.

Peut-on décider $m = (m_i)_i$ en PTIME? Pas forcément:

Il existe des jeux où les équilibres de Nash ne sont pas rationnels:

Ex $n \geq 2$ $a > d$, $b > c$

	tous les autres ignorent	tous les autres aident
aide	a	c
ignore	d	b

Equilibres purs : exactement une personne aide

Equilibres mixtes : on peut supposer

que tous les participants jouent la même stratégie (le jeu est symétrique et la preuve de Nash montre qu'il ex. des équilibres symétriques) :

$$m_i(\text{aide}) = p \in (0,1)$$

$$q := (1-p)^{n-1}$$

Eq. de Nash $\Rightarrow$

$$a \cdot q + c(1-q) = d \cdot q + b(1-q)$$

$$(a-d)q = (1-q)(b-c)$$

$$(a-d+b-c)q = b-c$$

$$q = \frac{b-c}{a-d+b-c}$$

$$p = 1 - \left(\frac{b-c}{a-d+b-c} \right)^{\frac{1}{n-1}} \notin \mathbb{Q}$$

Question : serait-il possible que le problème de Nash est NP-c?

En tant que problème de décision (est-ce qu'il existe un équilibre): non, car la réponse est tjr. "oui".

Mais on peut demander Nash-approx

Entrée $\text{jeu } (s_1, \dots, s_n, p_1, \dots, p_n),$
 $\varepsilon > 0$

Question Calculer un ε -équilibre de Nash :

$$m = (m_i)_{i=1}^n \quad \text{tq.} \quad \forall m_i'$$

$$\forall i : \quad p_i(m_i') \leq p_i(m) + \varepsilon$$
$$m_i' = (m_i', m_{-i})$$

Nash-approx est dans NP (on peut le vérifier), mais

il n'est pas probable qu'il soit
NP-complet :

Supposons que $\text{Sat} \leq \text{Nash-approx.}$

Donc : $\varphi \longrightarrow \text{jeu } \mathcal{G}$

tg. φ satisfaisable $\Rightarrow$

$\mathcal{G}$ a un ε -équilibre

Si $\varphi \notin \text{Sat}$ la réduction donne
un jeu $\mathcal{G}$ pour lequel on peut
devenir le ε -éq. de Nash

$\Rightarrow \overline{\text{Sat}} \leq \text{Sat} \Rightarrow \text{NP} =$
co-NP

Rq. Par contre il y a des variantes
NP-complètes :

- est-ce qu'il ex. éq. de Nash avec
payoff ≥ 1 ?
- est-ce qu'il ex. au moins 2
éq. de Nash ?

$\subseteq \text{TFNP}$

Classe de complexité PPAD
(polynomial parity arguments on directed graphs) :

Pb. End-of-line

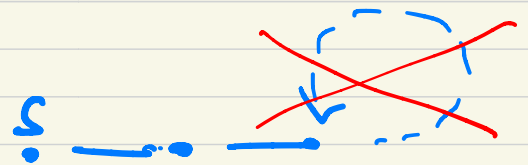
Entrée graphe G , de taille exp.,
donné par succ/pred, tq.

$\forall v : |\text{pred}(v)|, |\text{succ}(v)| \leq 1;$

$s \in V$ tq. $\text{pred}(s) = \emptyset$

Q Déterminer $t \neq s$ tq. soit
 $\text{pred}(t) = \emptyset$ ou $\text{succ}(t) = \emptyset$

t existe tq. car



Problèmes PPAD-complets :

- Σ -eq. de Nash pour $n \geq 2$
- eq. de Nash pour $n = 2$
- calcul de point fixe Brouwer

Algorithme de Lemke - Howson
pour calculer un éq. de Nash
pour 2 joueurs.

wlog : jeu symétrique

$$S_1 = S_2 = \{1, \dots, n\}, \quad p_1 = p_2 = p$$

On cherche éq. symm. :

$$m_1 = m_2 = m = (r_i)_{i=1}^n$$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1, \quad r_i \geq 0$$

$$\text{lemme} \begin{cases} p(m, m) \geq p(i, m) \quad \forall i = \overline{1, n} \\ \text{si } r_i > 0 \Rightarrow p(m, m) = p(i, m) \end{cases}$$

supposons qu'on trouve

$$m = (r_1, \dots, r_n) \text{ et } q \text{ éq.}$$

$$m = (r_1, \dots, r_n)$$

$$\sum_{i=1}^n r_i = 1$$

$$r_1 \geq 0$$

$$q \geq p(1, m)$$

:

$$r_n \geq 0$$

$$q \geq p(n, m)$$

$$\text{et } \forall i: \quad r_i = 0 \quad \vee \quad q = p(i, m)$$

$\Rightarrow (m, m)$ est éq. de Nash

On cherche $z_1, \dots, z_n$ tq.

$$z_1 \geq 0$$

$$1 \geq \sum_j z_j \cdot p(1, j)$$

:

$$z_n \geq 0$$

$$1 \geq \sum_j z_j \cdot p(n, j)$$

$$\sum_i z_i > 0$$

$$\text{et } \forall i: \quad z_i = 0 \quad \vee \quad 1 = \sum_j z_j \cdot p(i, j)$$

$$\Rightarrow \quad r_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^n z_i} \quad \text{éq. de Nash}$$

Ex

	1	2	3
1	0 0	3 0	0 2
2	0 3	0 0	3 2
3	2 0	2 3	2 2

$$(1) z_1 \geq 0 \quad (1') 1 \geq 3 z_2$$

$$(2) z_2 \geq 0 \quad (2') 1 \geq 3 z_3$$

$$(3) z_3 \geq 0 \quad (3') 1 \geq 2 z_1 + 2 z_2 + 2 z_3$$

On cherche une solution dans un polytope borné en parcourant les arêtes. Eq. de Nash: (1), (2'), (3')

$$\bar{z}_0 = (0, 0, 0) \rightarrow \bar{z}_1 : z_1 = z_3 = 0 \\ (0, 1/3, 0) \quad 1 = 3 z_2$$

$$\rightarrow \bar{z}_2 : z_3 = 0, 1 = 3 z_2, \\ 1 = 2 z_1 + 2 z_2 + 2 z_3$$

$$\rightarrow \bar{z}_3 : 1 = 3 z_2, 1 = 2 z_1 + 2 z_2 + 2 z_3 \\ z_1 = 0 \quad \text{Eq. de Nash}$$