

Attractors, reachability



Jeux sur graphes

Arènes de jeu

$$A = (V = V_0 \cup V_1, E)$$

$V_i \subseteq V$ sommets appartenant à P_i

parties : chemins dans (V, E)

Condition d'accessibilité $F \subseteq V$:
pour P_0

Pour gagner, P_0 doit visiter F .

Pour P_1 : le dual; P_1 doit
éviter F .

P_0
accessibilité
"visiter F "

P_1
sûreté
"éviter F "

$$Win = V^* F (V^* \cup V^w) \quad \text{cond. de victoire de } P_0$$

Pour P_1 : $(V \setminus F)^* \cup (V \setminus F)^\omega$

$\downarrow$
chemins finis
maximaux

$\downarrow$
chemins
infinis

Cas spécial : $V_1 = \emptyset$

$\downarrow$

chemin vers F suffit pour
gagner

(pour P_1 : v est gagnant pour P_1
 $\Leftrightarrow$ tous les chemins issus de
 v ne passent pas par F)

|| Si $V_0 \neq \emptyset$, $V_1 \neq \emptyset$ on ne peut plus
raisonner sur des chemins.

Idee : "distance" de P_0 vers F

$\rightarrow$ attracteur, chemins arrière

$X \subseteq V$: $\text{post}(X) =$ successeurs directs
des sommets de X

$$\text{post}(X) = \{v : \exists u \in X, u \rightarrow v\}$$

On va calculer $\text{Attr}_0(X)$

$\uparrow$
attracteur de P_0 vers X

$$\text{Attr}_0^0(X) = X$$

$$\text{Attr}_0^{n+1}(X) = \text{Attr}_0^n(X) \cup$$

$$\{v \in V_0 : \text{post}(v) \cap \text{Attr}_0^n(X) \neq \emptyset\}$$

$\cup$

$$\{v \in V_1 : \text{post}(v) \subseteq \text{Attr}_0^n(X)\}$$

$$\boxed{\text{Attr}_0(X) = \bigcup_{i \geq 0} \text{Attr}_0^i(X)}$$

$\hookrightarrow$ plus petit point fixe

On montre :

$v \in \text{Altr}_0^i(X) \Leftrightarrow P_0$ a une stratégie
à partir de v pour atteindre X
en $\leq i$ coups.

Par induction :

$i=0$: ok (0 coups)

$i \rightarrow i+1$

$v \in \text{Altr}_0^{i+1}(X) \Leftrightarrow$

- soit $v \in \text{Altr}_0^i(X)$ (hyp. ind.)
- ou $v \in V_0$ et il existe

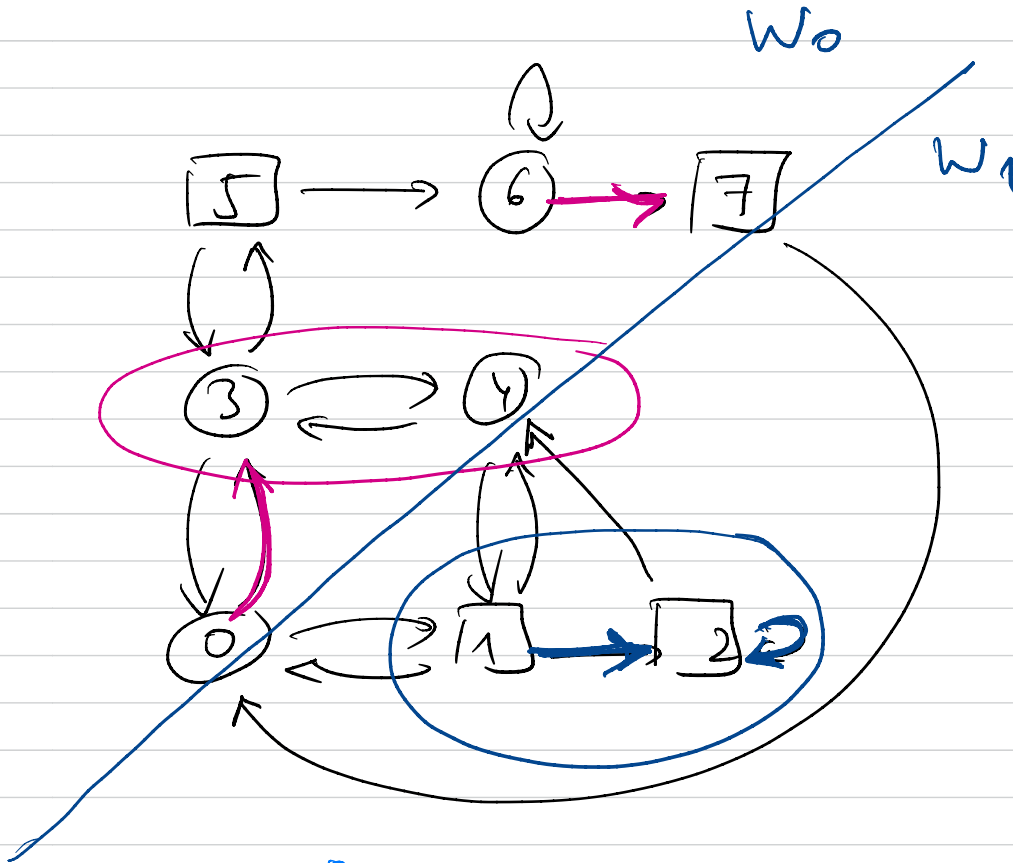
$v \rightarrow w \text{ tq. } w \in \text{Altr}_0^i(X)$

- ou $v \in V_1$ et tous les

$v \rightarrow w \text{ tq. } w \in \text{Altr}_0^i(X)$

Exemple

$$V_0 = \{0, 3, 4, 6\}$$



$$F = \{3, 4\}$$

→ stratégie
d'attraction de
 P_0

$$\text{Attr}_0^0(F) = \{3, 4\}$$

$$\text{Attr}_0^1(F) = \{3, 4\} \cup \{0\}$$

$$\text{Attr}_0^2(F) = \{0, 3, 4\} \cup \{7\}$$

$$\text{Attr}_0^3(F) = \{0, 3, 4, 7\} \cup \{6\}$$

$$\text{Attr}_0^4(F) = \{0, 3, 4, 7, 6\} \cup \{5\}$$

$$= \text{Attr}_0^5(F) = Y$$

Nos arêtes sont fines, donc

il ex. $u \in V$ tq.

$$Y := \text{Altr}_0^n(F) = \text{Altr}_0^{n+1}(F)$$

$$\text{Altr}_0^0(F) \subseteq \text{Altr}_0^1(F) \subseteq \dots$$

⊛ On montre que Y représente les sommets gagnants de $P_0 =$

régron gagnante de P_0 : W_0

La régron gagnante de P_1 : W_1

$$\textcircled{*} \quad Y = W_0, \quad V \setminus Y = W_1$$

(les jeux d'accessibilité sont
déterminés)

$$\text{Altr}_\infty(F) = \bigcup_{i \geq 0} \text{Altr}_0^i(F)$$

① $Y \subseteq W_0 :$

P_0 applique dans Y la stratégie d'attracteur (pour atteindre F)

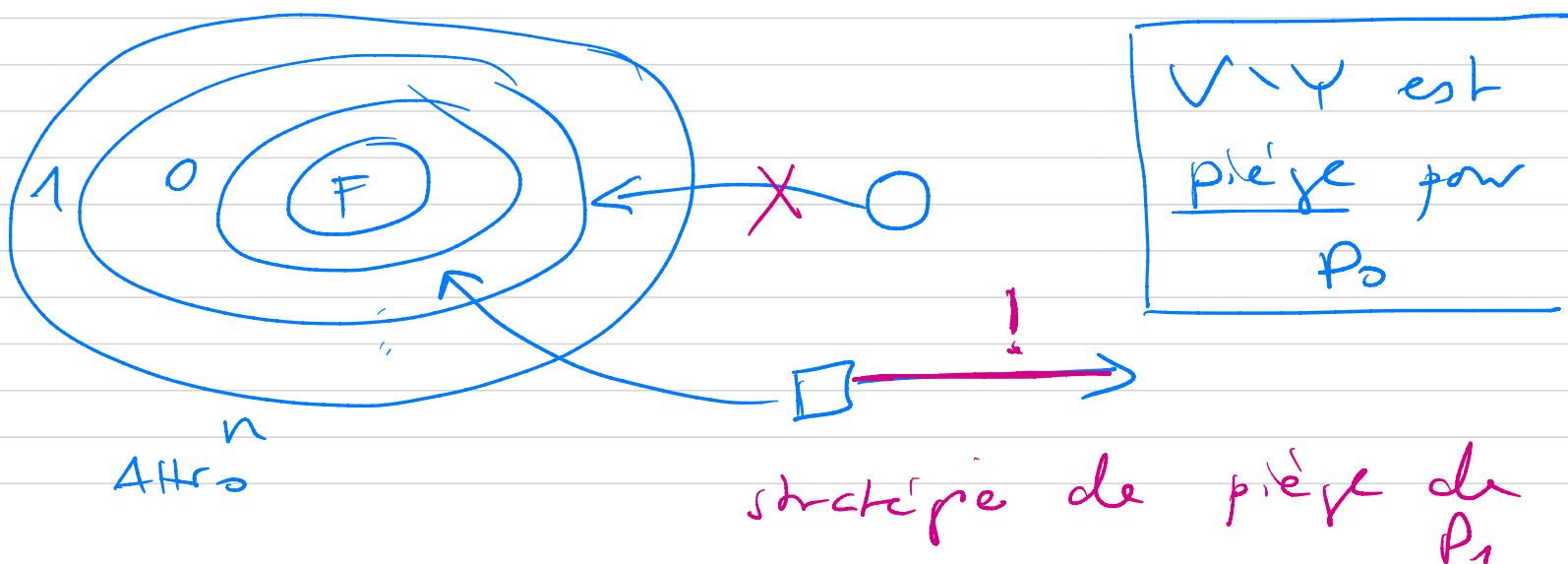
② $V \setminus Y \subseteq W_1 :$

$$Y = \text{Attr}_0^n(F) = \text{Attr}_0^{n+1}(F)$$

$v \notin Y$: 2 cas

a) $v \in V_0 :$ $\text{post}(v) \cap Y = \emptyset$
 $\text{post}(v) \subseteq V \setminus Y$

b) $v \in V_1 :$ $\text{post}(v) \cap (V \setminus Y) \neq \emptyset$



Stratégies

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_0 : & V^* V_0 \rightarrow V & \text{pour } P_0 \\ \Gamma_1 : & V^* V_1 \rightarrow V & P_1 \end{array}$$

historique

Rq les stratégies d'attracteur et de piège sont seu mémoire (ou positionnelles)

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_0 : & V_0 \rightarrow V \\ \Gamma_1 : & V_1 \rightarrow V \end{array}$$

Recap 1) les jeux d'accessibilité (pour P_0) / de sûreté (pour P_1) sont déterminés,

2) les stratégies gagnantes de P_0 (attracteur) et de P_1 (piège) sont positionnelles.

Comment calculer $W_0, W_1, \Gamma_0, \Gamma_1$?

On peut calculer W_0, W_1 en PTime,
même en $O(|V| + |E|)$

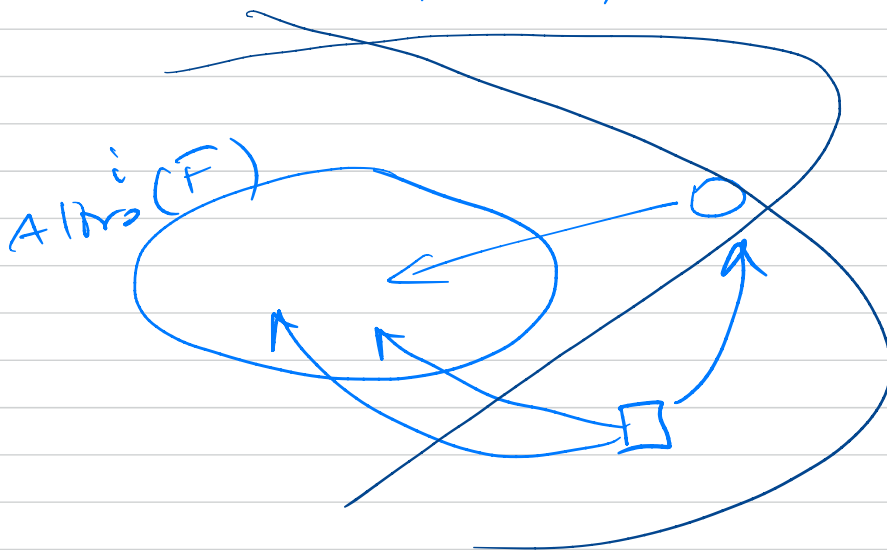
→ représentable par liste d'adj.
pre / post

PTime :

$$\text{Algo}^i_0(F) \rightarrow \text{Algo}^{i+1}_0(F)$$

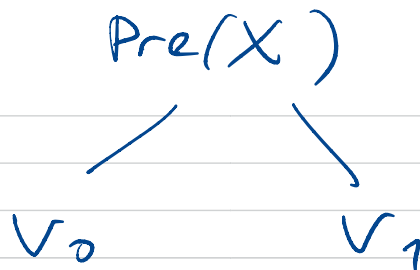
$$O(|V| + |E|)$$

$$i = 0, \dots, |V|$$



$$\rightarrow O(|V| \cdot |E| + |V|^2)$$

$$X = \text{Altr}_0^i(F)$$



- * On gère aussi une liste L qui contient des sommets-candidats, qui on peut rajouter déjà à X .
 $(L = \text{Altr}_0^1(X) \setminus X)$

- * Pour chaque $v \in V_1 \setminus (X \cup L)$ un compteur $c(v)$ pour le nb. de succ. enfants de X .

Initialisation : $X = F$

$$L = \left\{ \begin{array}{l} v \in V_0 : \text{post}(v) \cap F \neq \emptyset \\ v \in V_1 : \text{post}(v) \subseteq F \end{array} \right\}$$

Si $v \in V_1$:

$$c(v) = \# \{ w : v \rightarrow w, w \notin F \}$$

Tant que $L \neq \emptyset$:

1 choisir $v \in L$, $L := L \setminus \{v\}$

$X := X \cup \{v\}$

2 Pour tout $w \in \text{Pre}(v)$ ($w \rightarrow v$):

si $w \notin X \cup L$:

si $w \in V_1$: $c(w) --$

si $c(w) = 0$

alors $L := L \cup \{w\}$

si $w \in V_0$: $L := L \cup \{w\}$

Invariants : 1) $c(v) = |\text{Post}(v) \setminus X|$

2) $L = \{v \in V_1 \mid c(v) > 0\} \cup (\text{Pre}(X) \cap V_0)$

La complexité est $O(|V| + |E|)$ car
on considère chaque arête au
plus 1 fois.

le résultat : $X = W_0$

On considère maintenant des jeux
avec condition $\text{Reach}(F_1) \wedge \text{Reach}(F_2)$

$$F_1, F_2 \subseteq V, \quad F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

Pour gagner, P_0 doit visiter F_1
et F_2 (peu importe l'ordre).

On cherche pour les régions gagnantes:

$$\begin{cases} W_0 = \text{Attno} \left[(F_1 \cap \text{Attno}(F_2)) \cup \right. \\ \quad \left. (F_2 \cap \text{Attno}(F_1)) \right] \\ W_1 = V \setminus W_0 \end{cases}$$

$\supseteq$

$$W_0 = \text{Atro} \left((F_1 \cap \text{Atro}(F_2)) \cup (F_2 \cap \text{Atro}(F_1)) \right)$$

$\supseteq$ clair : P_0 joue la stratégie
d'attraction vers

$$(F_1 \cap \text{Atro}(F_2)) \cup (F_2 \cap \text{Atro}(F_1))$$

Si la partie arrive dans

$$\underline{w \in F_1 \cap \text{Atro}(F_2)}$$

alors P_0 continue avec stratégie
d'attraction vers F_2

Si la partie arrive dans

$$\underline{w \in F_2 \cap \text{Atro}(F_1)}$$

alors P_0 continue avec ---
--- vers F_1

La stratégie de P_0 :

$$\tau_0 : V \times \underbrace{\{0,1,2\}}_{\text{mémoire}} \rightarrow V$$

Si $v \in V$ est sommet actuel et

$m \in \{0,1,2\}$ la mémoire :

P_0 joue strat. de

$$\text{Attr}_0((F_1 \cap \dots) \cup (F_2 \cap \dots))$$

$$\text{si } m=0$$

P_0 joue strat. de $\text{Attr}_0(F_2)$ si

$$m=1$$

P_0 — — — — $\text{Attr}_0(F_1)$ si

$$m=2$$

$$\text{si } v \in F_1, \quad m=0 \quad \rightarrow \quad m'=1$$

$$v \in F_2, \quad m=0 \quad \rightarrow \quad m'=2$$

Pour $\subseteq$:

$$v \notin \text{Atro} \left((F_1 \cap \text{Atro}(F_2)) \cup (F_2 \cap \text{Atro}(F_1)) \right)$$

$\Rightarrow P_1$ a une stratégie σ_1 pour éviter $(F_1 \cap \text{Atro}(F_2)) \cup (F_2 \cap \text{Atro}(F_1))$

P_1 joue σ_1 et :

- si la partie évite complètement $F_1 \cup F_2$: OK

- si la partie arrive dans

$v \in F_1$: alors $v \notin \text{Atro}(F_2)$

$\rightarrow P_1$ joue à partir de là la strat. pour éviter F_2 : OK

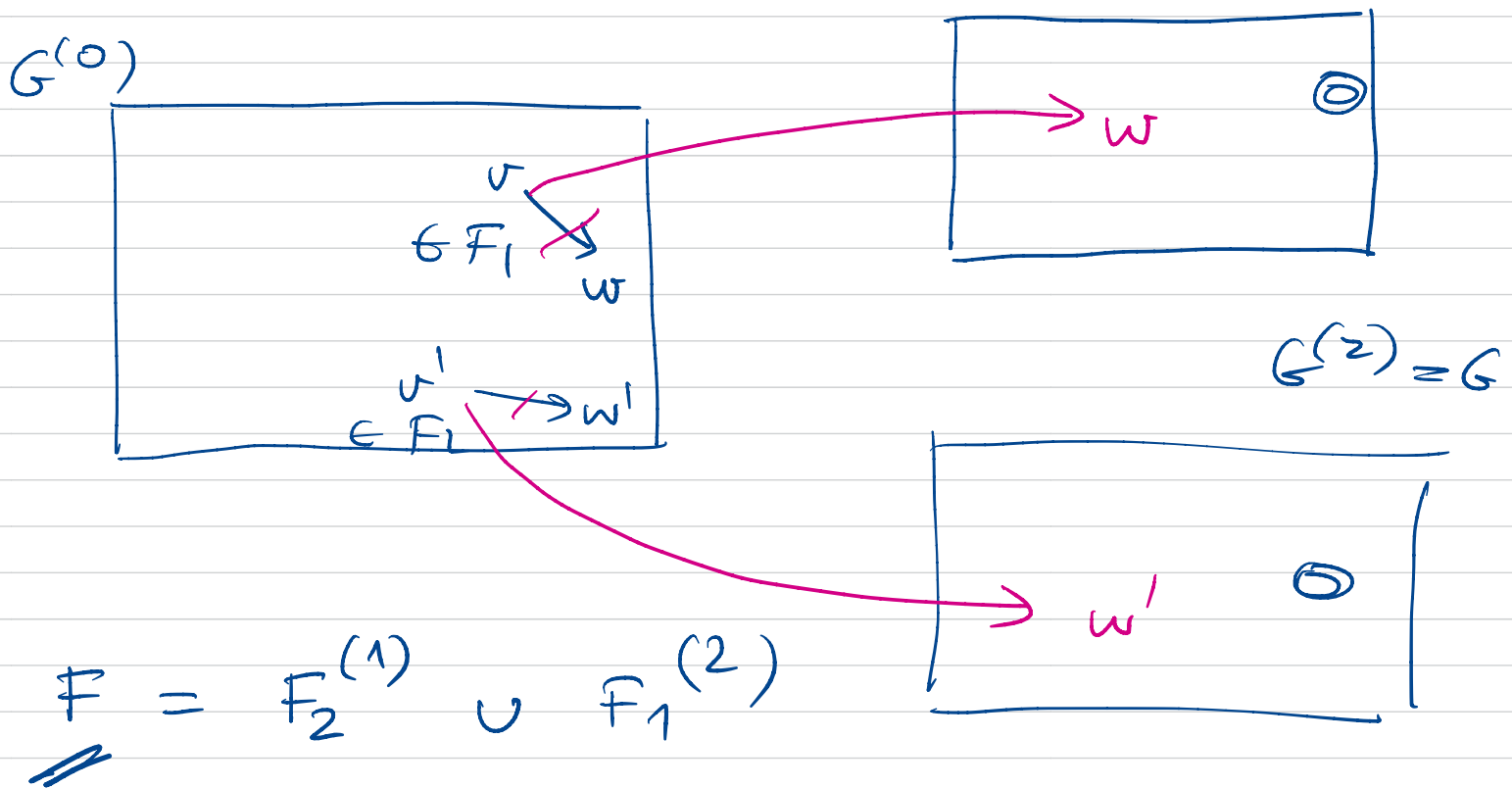
- symm. si elle arrive dans F_2

solution plus directe : arène plus grande :

3 copies de l'arène $G = (V, E)$

$G^{(0)}$, $G^{(1)}$, $G^{(2)}$

$G^{(1)} = G$



Jeux d'accessibilité $\text{Reach}(F)$:

v gagnant pour P_0 par rapport à

$\text{Reach}(F_1) \wedge \text{Reach}(F_2) \quad (\Leftarrow)$

$v^{(0)}$ gagn. pour P_0 par rapport à

$\text{Reach}(F)$