

---

---

---

---

---



## Jeux sur graphes

Arènes de jeu

$$A = (V = V_0 \cup V_1, E)$$

$V_i \subseteq V$  sommets appartenant à  $P_i$

parties : chemins dans  $(V, E)$

Condition d'accessibilité  $F \subseteq V$  :  
par  $P_0$

Pour gagner,  $P_0$  doit visiter  $F$ .

Pour  $P_1$  : le dual;  $P_1$  doit  
éviter  $F$ .

$P_0$   
accessibilité  
"visiter  $F$ "

$P_1$   
sûreté  
"éviter  $F$ "

$$Win = V^* F (V^* \cup V^w)$$

cond. de victoire de  $P_0$

Pour  $P_1 = (V \setminus F)^* \cup (V \setminus F)^\omega$

$\downarrow$  chemins finis maximaux       $\downarrow$  chemins infinis

Cas spécial :  $V_1 = \emptyset$

$\downarrow$

chemin vers  $F$  suffit pour gagner

(pour  $P_1$  :  $v$  est gagnant pour  $P_1$   
 $\Rightarrow$  tous les chemins issus de  
 $v$  ne passent pas par  $F$ )

|| Si  $V_0 \neq \emptyset$ ,  $V_1 \neq \emptyset$  on ne peut plus raisonner sur des chemins.

Idee : "distance" de  $P_0$  vers  $F$

$\rightarrow$  attracteur, chemins arrière

$X \in V$  :  $\text{post}(X) =$  successeurs directs des sommets de  $X$

$$\text{post}(X) = \{v : \exists u \in X, u \rightarrow v\}$$

On va calculer  $\text{Attr}_0(X)$

$\uparrow$   
attracteur de  $P_0$  vers  $X$

$$\text{Attr}_0^0(X) = X$$

$$\text{Attr}_0^{n+1}(X) = \text{Attr}_0^n(X) \cup$$

$$\{v \in V_0 : \text{post}(v) \cap \text{Attr}_0^n(X) \neq \emptyset\}$$

$$\{v \in V_1 : \text{post}(v) \subseteq \text{Attr}_0^n(X)\}$$

$$\text{Attr}_0(X) = \bigcup_{i \geq 0} \text{Attr}_0^i(X)$$

$\hookrightarrow$  plus petit point fixe

On montre :

$v \in \text{Attr}_0^i(X) \Leftrightarrow P_0$  a une stratégie  
à partir de  $v$  pour atteindre  $X$   
en  $\leq i$  coups.

Par induction :

$i=0$  : ok (0 coups)

$i \rightarrow i+1$

$v \in \text{Attr}_0^{i+1}(X) \Leftrightarrow$

- soit  $v \in \text{Attr}_0^i(X)$  (hyp. ind.)
- ou  $v \in V_0$  et il existe

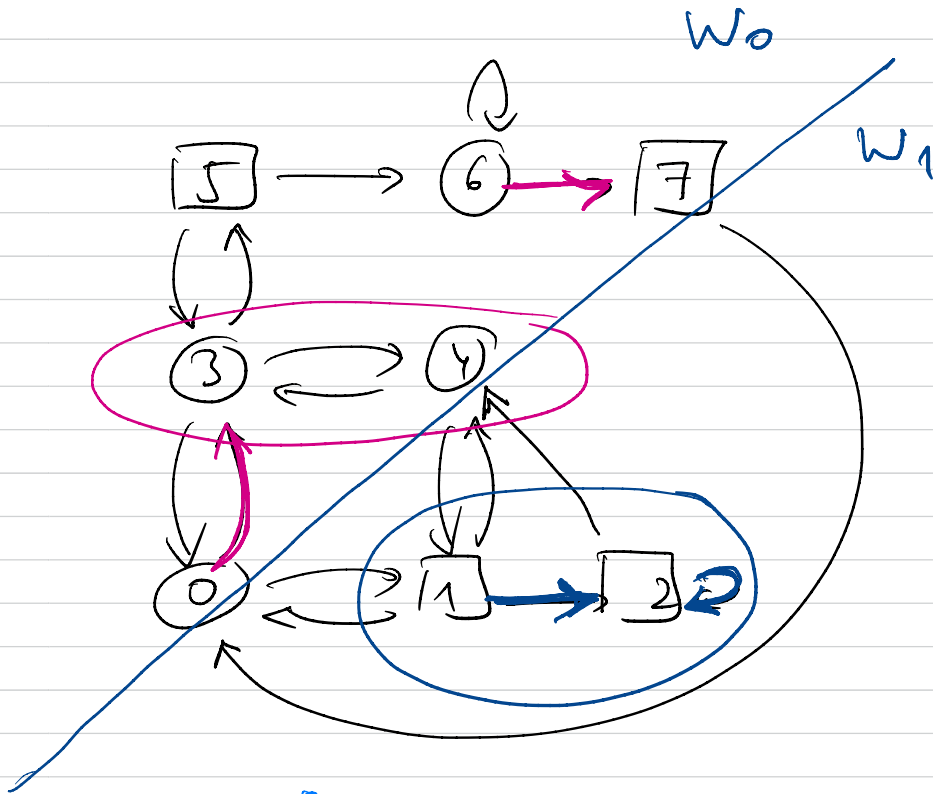
$v \rightarrow w \text{ tq. } w \in \underline{\underline{\text{Attr}_0^i(X)}}$

- ou  $v \in V_1$  et tous les

$v \rightarrow w \text{ tq. } w \in \underline{\underline{\text{Attr}_0^i(X)}}$

# Exemple

$$V_0 = \{0, 3, 4, 6\}$$



$$F = \{3, 4\}$$

→ stratégie d'attraction de  $P_0$

$$\text{Attr}_0^0(F) = \{3, 4\}$$

$$\text{Attr}_0^1(F) = \{3, 4\} \cup \{0\}$$

$$\text{Attr}_0^2(F) = \{0, 2, 4\} \cup \{7\}$$

$$\text{Attr}_0^3(F) = \{0, 3, 4, 7\} \cup \{6\}$$

$$\text{Attr}_0^4(F) = \{0, 3, 4, 7, 6\} \cup \{5\}$$

$$= \text{Attr}_0^5(F) = Y$$

Nos arêtes sont fines, donc

il ex.  $u \in |V|$  tq.

$$Y := \text{Altr}_0^n(F) = \text{Altr}_0^{n+1}(F)$$

$$\text{Altr}_0^0(F) \subseteq \text{Altr}_0^1(F) \subseteq \dots$$

⊛ On montre que  $Y$  représente les sommets gagnants de  $P_0 =$

région gagnante de  $P_0$  :  $W_0$

La région gagnante de  $P_1$  :  $W_1$

$$\text{⊛ } Y = W_0, \quad V \setminus Y = W_1$$

(les jeux d'accessibilité sont déterminés)

$$\text{Altr}_0(F) = \bigcup_{i \geq 0} \text{Altr}_0^i(F)$$

①  $Y \subseteq W_0$  :

$P_0$  applique dans  $Y$  la stratégie d'attracteur ( pour atteindre  $F$  )

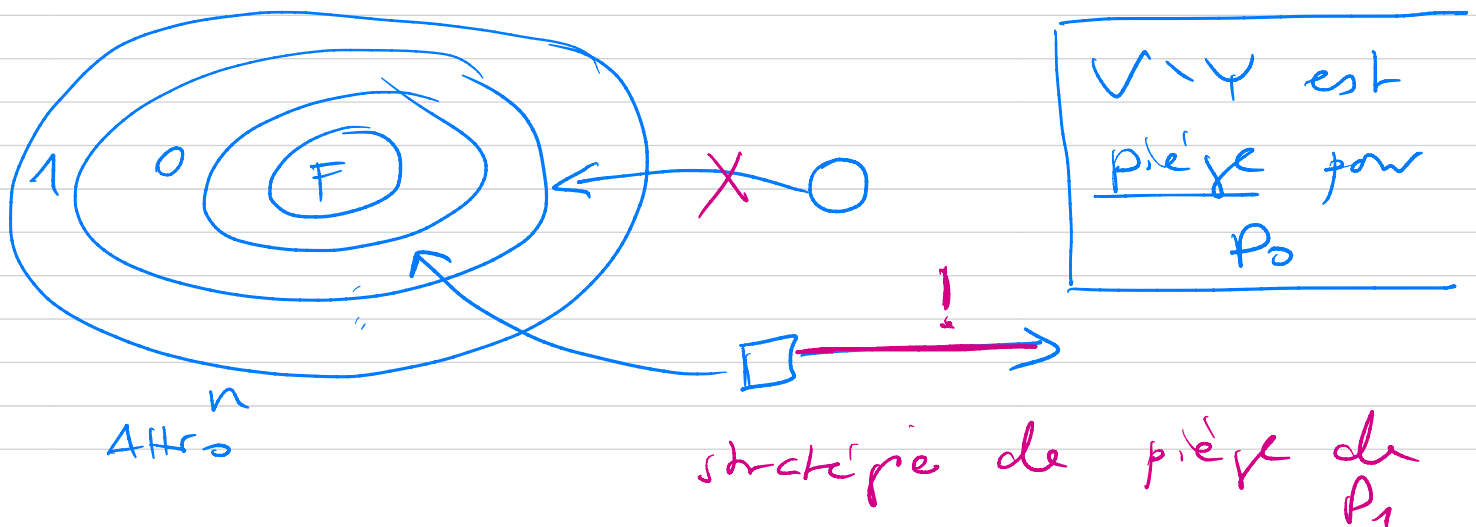
②  $V \setminus Y \subseteq W_1$  :

$$Y = \text{Attr}_0^n(F) = \text{Attr}_0^{n+1}(F)$$

$v \notin Y$  = 2 cas

a)  $v \in V_0$  :  $\text{post}(v) \cap Y = \emptyset$   
 $\text{post}(v) \subseteq V \setminus Y$

b)  $v \in V_1$  :  $\text{post}(v) \cap (V \setminus Y) \neq \emptyset$





## Stratégies

$$\begin{aligned} \Gamma_0 : & \quad V^* V_0 \rightarrow V && \text{pour } P_0 \\ \Gamma_1 : & \quad V^* V_1 \rightarrow V && P_1 \end{aligned}$$

historique

Rq les stratégies d'attracteur et de piège sont sans mémoire (ou positionnelles)

$$\Gamma_0 : V_0 \rightarrow V$$

$$\Gamma_1 : V_1 \rightarrow V$$

Recap 1) les jeux d'accessibilité (pour  $P_0$ ) / de sûreté (pour  $P_1$ ) sont déterminés,

2) les stratégies gagnantes de  $P_0$  (attracteur) et de  $P_1$  (piège) sont positionnelles.

Comment calculer  $W_0, W_1, \Gamma_0, \Gamma_1$  ?

On peut calculer  $W_0, W_1$  en PTime,  
même en  $O(|V| + |E|)$

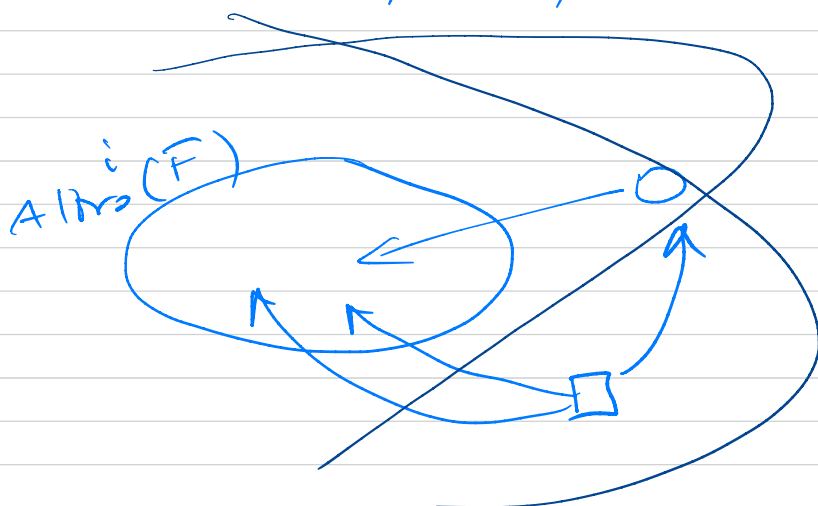
→ représentations par liste d'adj.  
pre / post

PTime :

$$\text{Algo}^i_0(F) \rightarrow \text{Algo}^{i+1}(F)$$

$$O(|V| + |E|)$$

$$i = 0, \dots, |V|$$



$$\rightarrow O(|V| \cdot |E| + |V|^2)$$