

Jeux de parité

$(V_0 \dot{\cup} V_1, E, p: V \rightarrow \{0, \dots, d\})$

$p(v)$ = priorité (couleur) de v

$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots$ gagnée par P_0

et $\max \{ p : \exists^\infty n : p(v_n) = p \}$
est paire

ex $\textcircled{5} \rightarrow \textcircled{t}^{\textcircled{2}}$ s, t, t, \dots est gagnée par P_0

On veut calculer :

$W_0 = \{ v : v \text{ gagnée par } P_0 \}$

$W_1 = \dots \dots \dots P_1$

On va montrer : ① $V = W_0 \dot{\cup} W_1$

(jeux déterminés)

② stratégies gagnantes positionnelles

$\sigma_i : V_i \rightarrow V$

Algorithme récursif (McNaughton - Yoneda)

Parity(G)

Input: $G = (V_0, V_1, E)$, $p: V \rightarrow \{0, \dots, d\}$

Output: (w_0, w_1)

if $V = \emptyset$ return (\emptyset, \emptyset) $i \in \{0, 1\}$

$i := d \bmod 2$;

$U := \{v \in V : p(v) = d\}$ // $U \neq \emptyset$

$A := \text{Attr}_i(U)$; // attracteur de P_i
vers U

Parity($G \setminus A$) $\rightarrow (w'_0, w'_1)$

if $w'_{1-i} = \emptyset$ then

$w_i := w'_i \cup A$ · $w_{1-i} := \emptyset$

return (w_0, w_1)

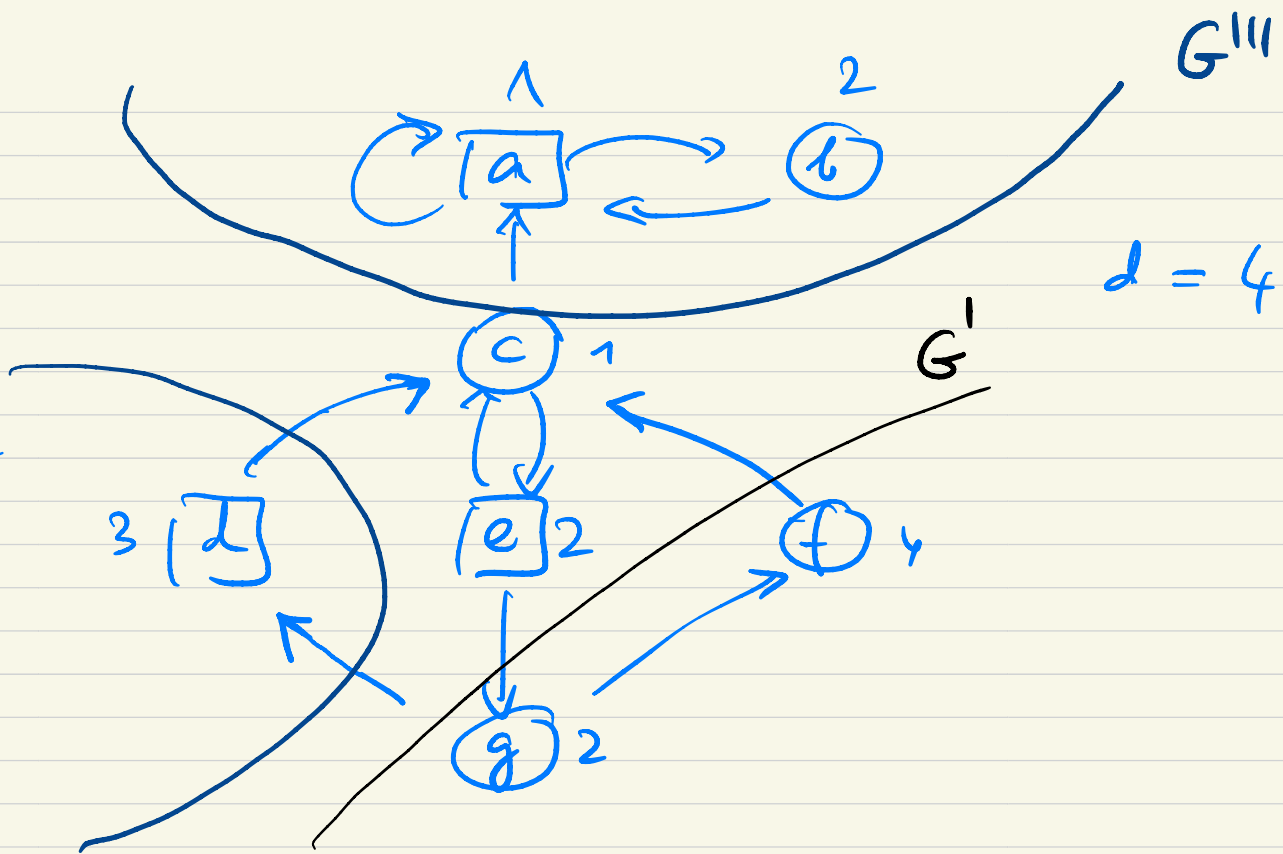
else $B := \text{Attr}_{1-i}(w'_{1-i})$ // $w'_{1-i} \neq \emptyset$

Parity($G \setminus B$) $\rightarrow (w''_0, w''_1)$

$w_i := w''_i$

$w_{1-i} := B \cup w''_{1-i}$

return (w_0, w_1)



$$i = 0$$

$$U = \{f\}$$

$$A_0 = \text{Attr}_0^G(f) = \{f, g\}$$

$$G' = G \setminus A_0$$

 \rightarrow

$$d = 3$$

$$i = 1$$

$$B_1 = \text{Attr}_1^{G'}(d) = \{d\}$$

$$G'' = G' \setminus B_1$$

$$\text{Parity}(G'') \rightarrow (\overset{W_0'}{\{c, e\}}, \overset{W_1'}{\{a, b\}})$$

$$B_2 := \text{Attr}_0(\{c, e\}) = \{c, e, d\}$$

$$G''' := G' \setminus B_2$$

$$\text{Parity}(G''') \rightarrow (\emptyset, \{a, b\})$$

$$\text{Parity}(G') \rightarrow (\overset{B_2}{\{c, c, d\}}, \{a, b\})$$

$$w_1' \neq \emptyset$$

$$B_3 := \text{Attr}_1^G(\{a, b\}) = \{a, b\}$$

$$G'''' := G \setminus B_3$$

$$\text{Parity}(G''''') = (\overset{w_0''}{\{c, d, e, f\}}, \overset{w_1''}{\emptyset})$$

Res. final

$$w_0 = \{c, d, e, f\}$$

$$w_1 = \emptyset \cup \{a, b\}$$

B_3

w_1''

$$= \{a, b\}$$

Complexité : $|V|=n, |E|=m$

$T_{n,m}(d)$ tmp. de calcul

$$T_{n,m}(d) \leq T_{n,m}(d-1) \overset{A}{+}$$

$$\Downarrow \quad T_{n-1,m}(d) + O(m+n) \text{ attr.}$$

$$T_{n,m}(d) \leq O(m \cdot n^d) \quad \rightarrow B$$

$$T_{n,m}(d) \leq T_{n,m}(d-1) + T_{n-1,m}(d) + c(m+n)$$

$$T_{n,m}(d) \leq c' \cdot m \cdot nd$$

$$c' \cdot m \cdot nd^{d-1} + c' \cdot m \cdot (n-1)^d + c \cdot (m+n) \leq c' \cdot m \cdot nd$$

$$c' \cdot m \cdot \underbrace{(nd - nd^{d-1} - (n-1)^d)}_{\alpha} \geq c \cdot (m+n)$$

$$nd - (n-1)^d = nd^{d-1} + \underbrace{nd^{d-2}(n-1) + \dots + (n-1)^{d-1}}_{\alpha}$$

Rq. Si d est fixé, la complexité est polynomiale (dans la taille de l'arcène).

Rq

$$p: V \rightarrow \{1, 2\}$$

Būdi (accessibilité répétée)

$$d = 2 \\ i = 0$$

$$F = \{v : p(v) = 2\}$$

$$A = \text{Alt}_0(F)$$

$$(\text{Parity}(G \setminus A) \rightarrow (W_0', W_1'))$$

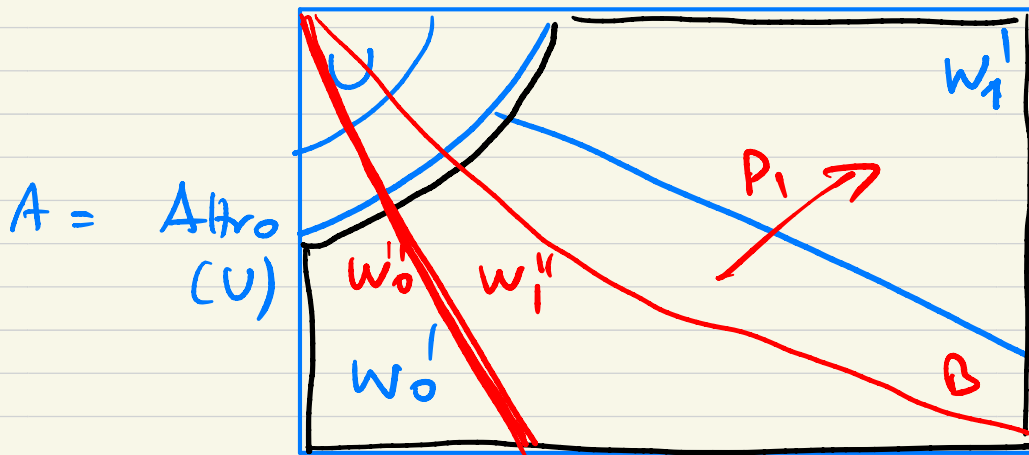
$$[\text{if } W_1' = \emptyset : \text{return}(A \cup W_0', \emptyset)]$$

else $B = \text{Alt}_1(W_1')$

$$\text{Parity}(G \setminus B) \rightarrow (W_0'', W_1'')$$

$$\text{return}(W_0'', B \cup W_1'')$$

d pair



$$B = \text{Attr}_1(W_1')$$

On montre par récurrence que
l'algo de McNaughton - Steink
calculer les équilibres gagnants
 W_0, W_1 tq. $V = W_0 \cup W_1$, et
que les stratégies gagnantes sont
positionnelles.

supposons $i=0$.

Cas 1 $W_1' = \emptyset \rightarrow W_1 = \emptyset$
 $W_0 = A \cup W_0'$

σ_0 : strat. d'attracteur dans A ,
et strat. pos. σ_0' sur W_0'

Cas 2 $B = \text{Attr}_1(W_1')$, $G'' = G \setminus B$

$\rightarrow W_0 = W_0''$, $W_1 = B \cup W_1''$

$\sigma_0 \rightarrow$ strat. gagn. σ_0'' sur W_0''

$\sigma_1 \rightarrow$ strat. d'attraction sur B ;

dès que la partie arrive dans
 W_1' : strat. gagn. pos. σ_1' sur W_1'

Pq $W_0'' \subseteq W_0$ avec σ_0 :

Parce que $V \setminus B$ est piège pour P_1
($= V''$)

On montre que P_1 gagne sur W_1
avec σ_1 :

- a) si la partie commence dans B ,
alors elle atteint forcément W_1'
et y reste : P_1 gagne avec σ_1'
- b) si la partie commence dans W_1'' :
soit elle y reste, ou elle va dans B
(P_1 gagne avec σ_1'') \rightarrow cas a)