

# Théorème de Nash

---

---

---

---



## Stratégies mixtes

Jusqu'à maintenant on a déf.  
les éq. de Nash avec stratégies  
pures ( $s_i \in S_i$ ),

Pierre - feuille - viceux  $\rightarrow$  choix probab.

- On va introduire des stratégies  
probabilistes ("mixtes")
- On va montrer le thm. de Nash,  
qui dit que dans tout jeu fini il  
existe au moins un éq. de Nash  
avec strat. mixtes
- On va montrer comment calculer  
un éq. de Nash dans le cas spécial  
de 2 joueurs à zero sum:  
Minimax - Théorème (von Neumann)

$A \neq \emptyset$  fini

Une distrib. de prob. sur  $A$ :

$$pr: A \rightarrow [0, 1]$$

$$\sum_{a \in A} pr(a) = 1$$

On note par  $\Delta A =$  ens. des distrib. de probas sur  $A$

Jeux stratégiques

$$(\Omega_1, \dots, \Omega_n, p_1, \dots, p_n)$$

Une strat. mixte pour le joueur  $i$

= distrib. de proba sur  $\Omega_i$

Not.  $\Delta \Omega_i =$  ens. des stratégies mixtes pour  $i$

$$m_i \in \Delta \Omega_i$$

$$\text{supp}(m_i) = \{s \in \Omega_i : m_i(s) > 0\}$$

$$m \in \Delta \Omega_1 \times \dots \times \Delta \Omega_n \rightarrow$$

$$m = (m_1, \dots, m_n)$$

$$m_{-i} = (m_1, \dots, m_{i-1}, m_{i+1}, \dots, m_n)$$

$$s = (s_i)_i$$

payoff

$$m(s) := m_1(s_1) \cdot m_2(s_2) \cdot \dots \cdot m_n(s_n)$$
$$p_i(m) = \sum_{s \in S} \underbrace{m(s)}_{\in [0,1]} \cdot \underbrace{p_i(s)}_{\substack{\uparrow \\ \text{matrix}}}$$

ex Matching pennies

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

pas d'éq. de Nash  
pur

$$m_1 = \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} T = m_2$$

$$p_1(m) = 1 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 = p_2(m)$$

---

Def  $m$  est éq. de Nash si pour tout  $i$ , et pour toute strat. mixte  $m_i'$  :

$$p_i(m) \geq p_i(m_i', m_{-i})$$

1 \ 2	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

$$m_1 = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}T =$$

$m_2$  est Eq. de Nash

$$m_1' = p \cdot H + (1-p) \cdot T$$

$$p_1(m_1', m_2) = 1 \cdot \frac{p}{2} + (-1) \cdot \frac{p}{2} + (-1) \cdot \frac{1-p}{2} + 1 \cdot \frac{1-p}{2} = 0 = p_1(m)$$

[IESDS]: iterated elimination of strictly dominated strategies

→ on élimine une stratégie (pure) si elle est strictement dominée par une stratégie mixte  $m_i$ :

$$p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(m_i, m_{-i}),$$

$\forall m_{-i}$

Rq. L'ordre d'élimination n'est pas important. Les équilibres de Nash ne sont pas éliminés par IESDS

Ex Pour MP, la strat. H n'est pas strict. dominée, par aucune strat. mixte  $m_1$ , car avec

$$\begin{cases} m_2 = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}T \\ m_1 = r \cdot H + (1-r)T \end{cases} \quad \text{on a}$$

$$p_1(H, m_2) = \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$= p_1(m_1, m_2) = \frac{r}{2} + \frac{1-r}{2} - \frac{r}{2} - \frac{1-r}{2} = 0$$

Donc iESDS n'inclut aucune stratégie. dans MP.

lemme Pour tout jeu stratégique  
 $(S_1, \dots, S_n, p_1, \dots, p_n)$  on a  
 l'équivalence des points suivants :

(1)  $m$  est éq. de Nash

(2) Pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  
 $s_i \in S_i$  :

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

(3) Pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  
 $s_i \in S_i \cap \text{supp}(m)$  :

$$p_i(m) = p_i(s_i, m_{-i})$$

et pour tout  $i$  et tout

$s_i \in S_i \setminus \text{supp}(m)$  :

$$p_i(m) \geq p_i(s_i, m_{-i})$$

démo

(1)  $\rightarrow$  (2)  $\rightarrow$  (3)  $\rightarrow$  (1)

$$p_i(m) = \sum_{s \in \text{supp}(m)} m_i(s_i) \cdot m_{-i}(s_{-i}) \cdot p_i(s)$$

$$= \sum_{s_i \in \text{supp}(m_i)} m_i(s_i) \cdot p_i(s_i, m_{-i})$$

Ex Battle of sexes : possède aussi un Éq de Nash en strat. mixtes

	2	S	B
1			
S		2,1	0,0
B		0,0	1,2

$$m_1 = r_1 \cdot S + (1-r_1) \cdot B$$

$$m_2 = r_2 \cdot S + (1-r_2) \cdot B$$

$0 < r_1, r_2 < 1$

$$p_1(m) = 2 \cdot \overset{4/9}{r_1} \cdot \overset{2/9}{r_2} + (1-r_1) \cdot (1-r_2)$$

$$p_2(m) = \overset{2/9}{r_1} \cdot r_2 + 2(1-r_1) \cdot \overset{4/9}{(1-r_2)}$$

Si m Éq. de Nash :

③ support  $(m_1) = \{S, B\}$

$$\begin{aligned} \downarrow p_1(m) &= p_1(S, m_2) = p_1(B, m_2) \\ \overset{2}{\parallel} & \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel \\ \overset{3}{3} & \qquad \qquad 2r_2 \qquad \qquad 1 \cdot (1-r_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2r_2 = 1-r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} p_2(m) &= p_2(m_1, S) = p_2(m_1, B) \\ \overset{2}{\parallel} & \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \parallel \\ \overset{3}{3} & \qquad \qquad r_1 \qquad \qquad 2(1-r_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{2}{3}$$

Ex: MP

$r_1 \backslash r_2$	H	T
H	1, -1	-1, 1
T	-1, 1	1, -1

$$m_1 = r_1 \cdot H + (1-r_1) \cdot T$$

$$m_2 = r_2 \cdot H + (1-r_2) \cdot T$$

$$\begin{aligned} p_1(m) &= r_1 r_2 + (1-r_1)(1-r_2) \\ &\quad - r_1(1-r_2) - (1-r_1)r_2 \\ &= r_1 r_2 + 1 - r_1 - r_2 + r_1 r_2 \\ &\quad - r_1 + r_1 r_2 - r_2 + r_1 r_2 \\ &= 4r_1 r_2 - 2r_1 - 2r_2 + 1 \end{aligned}$$

Si  $\text{support}(m_1) = \{H, T\}$  :

$$p_1(H, m_2) = p_1(T, m_2)$$

$$\begin{aligned} r_2 - (1-r_2) &= -r_2 + (1-r_2) \\ 2r_2 &= 2(1-r_2) \Rightarrow r_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$(H, m_2)$  eq. de Nash?

Non, car  $p_1(H, H) \neq p_1(H, T)$ .

## Th. de Nash ( $\sim 1950$ )

Tout jeu stratégique fini a au moins un éq. de Nash avec strat. mixtes.

Rq Il y a des jeux qui ont que des éq. de Nash en stratégies mixtes (MP, PFC, ...)

Preuve en utilisant le thm. de point fixe de Brouwer.

[Brouwer]: Si  $D \subseteq \mathbb{R}^d$  est convexe et compact, et  $f: D \rightarrow D$  est continue, alors il ex.  $x \in D$  tq.  $f(x) = x$ .

On déf. pour:  $i \in [1..n]$ ,  $m$  stratégie mixte,  $s_i \in S_i$

$$\text{Gain}_{s_i}(m) = \max \left\{ p_i(s_i, m_{-i}) - p_i(m) ; 0 \right\}$$

On applique Brouwer avec

$$\bullet \quad D = [0, 1]^{s_1} \times \dots \times [0, 1]^{s_n}$$

$$\bullet \quad \forall m \in D : f(m) = m' \text{ tq.}$$

$$\forall i, \forall s_i \in S_i :$$

$$m'_i(s_i) := \frac{m_i(s_i) + \text{Gain}_{s_i}(m)}{1 + \sum_{s'_i \in S_i} \text{Gain}_{s'_i}(m)}$$

$$\underline{\text{Rq}} \quad \sum_{s_i \in S_i} m'_i(s_i) = 1$$

Rq.  $f$  est continue

On montre que si  $m = f(m)$ , alors  $m$  est équilibre de Nash.

Il suffit de montrer :

$$\text{Gain}_{s_i}(m) = 0, \quad \forall i, s_i \in S_i$$
$$\text{max} \{ p_i(s_i, m_{-i}) - p_i(m); 0 \}$$

Gain $_{s_i}(m) = 0$ ,  $\forall i, s_i \in S_i$ :

Supposons par contradiction qu'il  
ex.  $i, s_i \in S_i$  tq.

$$\underline{\text{Gain}_{s_i}(m) > 0} \quad (\Leftrightarrow p_i(s_i, m_{-i}) > p_i(m))$$

On note que  $\underline{m_i(s_i) > 0}$ .  
(pas possible d'avoir  $m_i(s_i) = 0$   
à cause de  $m'_i(s_i) > 0$  et  $m = m'$ )

$$p_i(m) = \sum_{s'_i \in S_i} m_i(s'_i) \cdot p_i(s'_i, m_{-i})$$

$$f(m) = m' (=m)$$

À cause de  $m_i(s_i) > 0$  et

$p_i(s_i, m_{-i}) > p_i(m)$ , il doit ex.

$s'_i \in S_i$  tq.  $m_i(s'_i) > 0$  et

$$p_i(s'_i, m_{-i}) < p_i(m)$$

$$(\Rightarrow \text{Gain}_{s'_i}(m) = 0)$$

Donc  $\underline{m'_i(s'_i)} \stackrel{df}{=} \underline{m_i(s'_i) + \text{Gain}_{s'_i}(m)} <$

$$1 + \sum \text{Gain}_{s'_i}(m)$$

$$\underline{m_i(s'_i)} \rightarrow \text{contradict } m = m'!$$