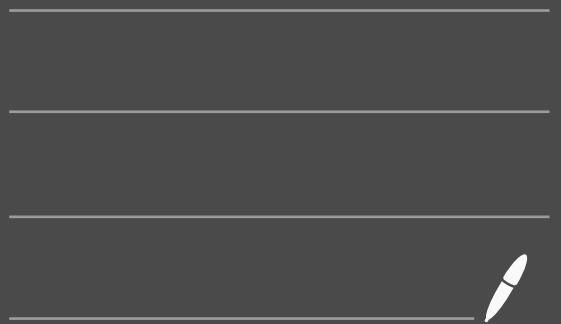


Obligations games, WP



Comment résoudre des jeux avec conditions combinées, telles que

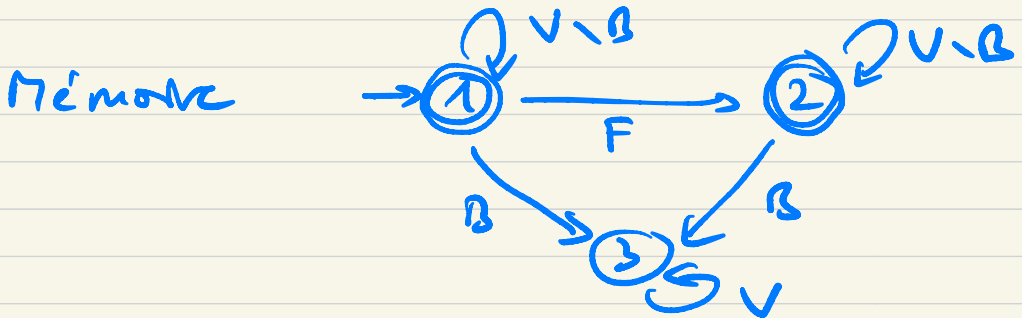
Reach (F) \wedge Avoid (B)

Reach & stay (F)

?

Ex Reach (F) \wedge Avoid (B)

$$Win = (V-B)^* F (V-B)^\infty$$



Nouvelle crine $V' = V^{(1)} \cup V^{(2)}$,

$$V' = V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup \{\perp\}$$

$$F \cap B = \emptyset$$

$$F' : (u, i) \rightarrow (v, j) \quad \text{si}$$

$$u \rightarrow v$$

$$\begin{cases} i=j=1 & \& \quad u \in F \cup B \\ i=1, j=2 & \& \quad u \in F \\ i=j=2 & \& \quad u \notin B \end{cases}$$

$$(u, i) \rightarrow \perp \quad \text{si}$$

$$i \in \{1, 2\}, u \in B$$

$$\perp \rightarrow \perp$$

Dans A' : Po veut atteindre $v^{(2)}$ et y rester (ie, éviter \perp).

Quel type de jeu ?

Méthode de résolution de jeux

de type $\text{Reach}(F_1) \wedge \text{Reach}(F_2)$,

ou $\text{Reach}(F_1) \wedge \text{Avoid}(F_2)$, etc.

→ Jeux d'obligation

Win = combinaison booléenne de

cond. $\text{Reach}(F)$, $F \subseteq V$

$$= \tilde{F} \subseteq 2^V$$

\downarrow $\hookrightarrow \{U : U \subseteq V\}$

$$= \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$$

Ex $Win_1 = \text{Reach}(F_1) \wedge \text{Reach}(F_2)$

$$\rightarrow \tilde{F}_1 = \{U \subseteq V : U \cap F_1 \neq \emptyset, \text{ et } U \cap F_2 \neq \emptyset\}$$

$Win_2 = \text{Reach}(F_1) \wedge \text{Avoid}(F_2)$

$$\rightarrow \tilde{F}_2 = \{U \subseteq V : U \cap F_1 \neq \emptyset, U \cap F_2 = \emptyset\}$$

Partie $\pi = v_0, v_1, \dots$ est
gagnée par P_0 ssi l'ensemble
des états visités dans π est ds. \mathcal{F} .

Pour résoudre ces jeux, on va
passer par les jeux de parité faible.

$A = (V_0, V_1, E)$ + fonction de
priorité $p: \underline{V_0 \cup V_1} \rightarrow \{0, \dots, K\}$

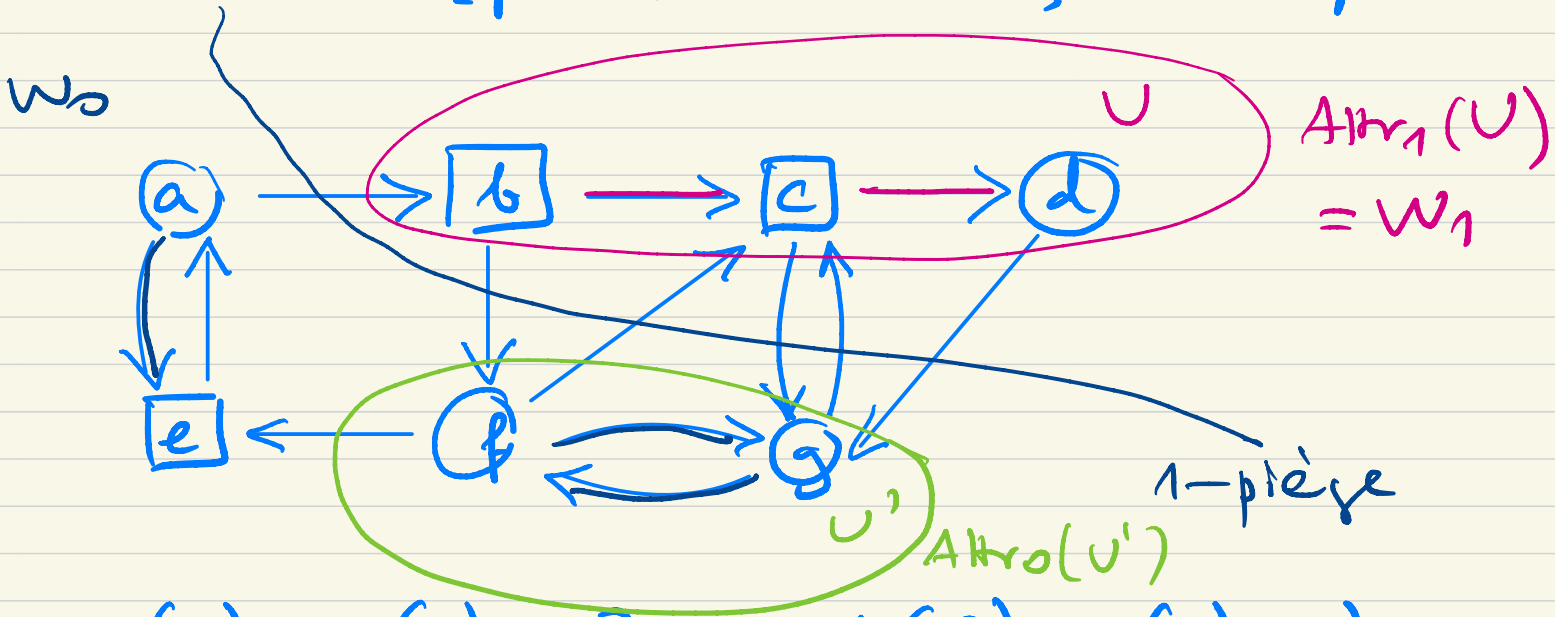
$p(v) =$ priorité (couleur) de v

Partie $\pi = v_0, v_1, \dots$ maximale
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $p(v_0) \quad p(v_1) \quad \dots$

P_0 gagne π si la plus grande
priorité vue dans π est paire
(P_1 gagne si elle est impaire).

π est gérée par P_0 si

$\max \{ p(v_i) : i \geq 0 \}$ est pair



$$p(a) = p(e) = 0$$

$$p(c) = p(g) = 2$$

$$p(b) = p(f) = 1$$

$$p(d) = 3$$

$$d \in W_1$$

$$c \in W_1$$

$$c \rightarrow d \in V_1$$

$$g \rightarrow f$$

$$f \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow g \dots$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \quad 2$$

$$\rightarrow \max 2$$

$$P_0 \text{ gérée}$$

[Plus tard : jeu de parité \rightarrow
 souvent]

On veut montrer que les jeux de parité faible sont :

- déterminés ($V = W_0 \dot{\cup} W_1$)
- résolubles en temps polynomial (calcul de W_0, W_1 en PTime)
- les stratégies gagnantes sont positionnelles

$$\sigma_0 : V_0 \rightarrow V$$

$$\sigma_1 : V_1 \rightarrow V$$

$$A = (V_0, V_1, E), \quad p : V \rightarrow \{0, \dots, k\}$$

Supposons que k est impair

(l'autre cas est symétrique)

$$U := \{v \in V : p(v) = k\} \neq \emptyset$$

On note que $U \subseteq W_1$, et
aussi $A = \text{Attr}_1(U) \subseteq W_1$.

On considère

$$V \setminus A \equiv V'$$

On résout le jeu de parité faible sur la sous-arène de jeu définie par V' \rightarrow 1-plate

$$A' = (V_0 \setminus A, V_1 \setminus A, E \cap (V' \times V'))$$

Par récurrence, on obtient des régions gagnantes $W_0' \subseteq V'$

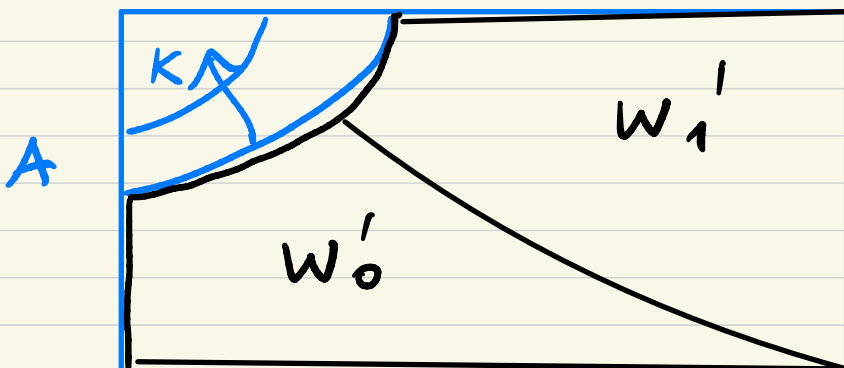
$$V' = W_0' \cup W_1' \mid W_1' \subseteq V',$$

ainsi que des stratégies gagnantes positionnelles

$$\sigma_0' : V_0' \rightarrow V'$$

$$\sigma_1' : V_1' \rightarrow V'$$

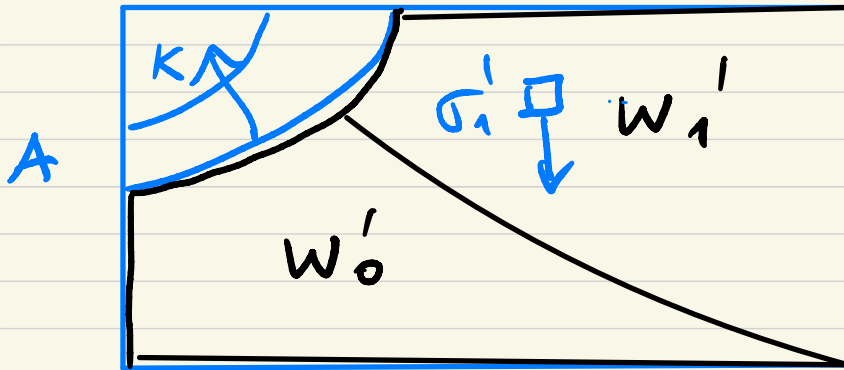
$$\text{et } W_0' \cup W_1' = V'.$$



On montre:

$$W_0 = W_0'$$

$$W_1 = A \cup W_1'$$



On montre:

$$W_0 = W_0'$$

$$W_1 = A \cup W_1'$$

$$W_0' \subseteq W_0$$

parce que P_1 ne peut pas quitter V' (V' est 1-piège)

$$A \subseteq W_1 :$$

Dans A , P_1 applique la stratégie d'attraction pour aller dans l'ensemble de priorité K , donc K sera la plus grande priorité.

$$W_1' \subseteq W_1$$

Dans W_1' , P_1 applique la stratégie (séparée sur V') σ_1' .

Si une partie commence dans W_1' et reste dans V' , alors elle est séparée par P_1 (par réc.)

Si une partie démarre et reste dans V' , alors :

→ elle est gagnée par P_0 , si elle démarre dans W_0'
resp.

par P_1 , si elle démarre dans W_1' (par. hyp.)

Une partie peut quitter V' (à cause de P_0) et aller dans A , dans quel cas elle va être gagnée par P_1 .

Les stratégies gagnantes :

$\sigma_0 = \sigma_0'$ sur W_0'

$\sigma_1 = \sigma_1'$ sur W_1' , attracteur sur A

sont positionnelles.

Le temps de calcul sera quadratique :

Calcul de A : $O(|V| + |E|)$

Appel récursif sur V' : $O(|V'| + |E'|)^2$

$$\begin{aligned}t(V, E) &\leq c \cdot (|V| + |E|) + \\ &\quad c' \cdot (|V'| + |E'|)^2 \\ &\leq c' (|V| + |E|)^2\end{aligned}$$

Jeux d'obligation :

$$\mathcal{F} \subseteq 2^V$$

$$\mathcal{F} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$$

Il nous reste à réduire les jeux d'obligation à partie faible.

On va "mémoriser" les états visités.

Nouvelle arène $V \times 2^V = V'$
↑
mémoire

avec arêtes $E' \subseteq V' \times V'$:

$(u, X) \rightarrow (v, Y)$ si

$(u, v) \in E$ et $Y = X \cup \{u\}$

$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots$ partie originale

$(v_0, \emptyset) \rightarrow (v_1, \{v_0\}) \rightarrow (v_2, \{v_0, v_1\}) \rightarrow \dots$

partie dans l'arène A'

$$V'_0 = V_0 \times 2^V$$

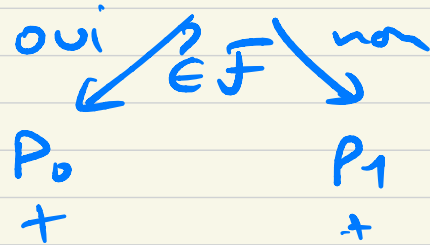
$$V'_1 = V_1 \times 2^V$$

$(v_0, X_0) \rightarrow (v_1, X_1) \rightarrow \dots$

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \dots$$

$$\underline{\underline{X_n = X_{n+1} = \dots}}$$

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 3$
 $\emptyset \quad \{1\} \quad \{1,2\} \quad \{1,2,3\} \quad \dots \quad \{1,2,3,4\}$



On déf. $p : V' \rightarrow \{0, \dots, 2|V|+2\}$

$$p(u, X) = \begin{cases} 2|X|+2 & \text{si } X \in \overline{F} \\ 2|X|+1 & \text{si } X \notin \overline{F} \end{cases}$$

$$|X| \leq |V|$$

Rq les priorités au cours d'une partie sont croissantes, parce que

$$(u_0, X_0) \rightarrow (u_1, X_1) \rightarrow \dots$$

$$X_0 \leq X_1 \leq \dots$$

$$2|X_0|+1/2 \leq 2|X_1|+1/2 \leq \dots$$

La plus grande priorité est $2|X_n|+1/2$, où $X_n = \text{ens. des sommets visités}$.

Réduction du jeu d'obligation

(V_0, V_1, E, F) vers le jeu de
parité faible (V_0', V_1', E', P) :

$$f(v) = (v, \emptyset)$$

$v \in V \quad \in V'$

v est gagnant pour P_0 dans le
jeu d'obligation \Leftrightarrow

(v, \emptyset) est gagnant pour P_0 dans
le jeu de parité faible.

(\Rightarrow) P_0 a une stratégie gagnante σ_0

\Rightarrow toute partie conforme à σ_0 :

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \quad t_1,$$

$$\{v_i : i \geq 0\} \in F$$

Dans V' , P_0 "joue" σ_0 :

$$(v, X), \quad v \in V_0$$

$$\sigma'_0(v, X) := (\sigma_0(v), \underline{X \cup \{v\}})$$

σ'_0 est gagnante pour P_0 , parce que
la priorité max. est $2/|X| + 2$,
où $X = \text{ens. des sommets visités}$
($X \in \mathcal{F}$)

(\Leftarrow) soit $\sigma'_0 = \text{strat. gagn. de } P_0$
dans le jeu de priorité faible
 $\sigma'_0 : V_0' \rightarrow V'$ strat. pos.

\Rightarrow stratégie σ_0 pour P_0 avec
mémoire 2^V dans le jeu
d'obligation

$$\sigma_0 : V_0 \times M^{2^V} \rightarrow V$$

$$\sigma_0(v, X) := w \quad \text{tq.} \quad \sigma'_0(v, X) = (\underline{w}, Y)$$

$$\text{update}(v, X) := X \cup \{v\}$$

Rem La réduction "jeux d'obligation"
vers "jeux de parité faible" peut
être simplifiée dans certains cas.

Ex $\text{Reach}(F_1) \wedge \text{Reach}(F_2) = \text{Win}_1$

$$A_1 = (V_0, V_1, E), \text{Win}_1$$

$$\rightarrow A_2 = (V'_0, V'_1, E', p: V \rightarrow \{1, 2\})$$

$$V' = V \times \left\{ \overbrace{\phi, \{1\}}^1, \{2\}, \overbrace{\{1, 2\}}^2 \right\}$$

$$((u, i), (v, j)) \in E' \Leftrightarrow$$

$$(u, v) \in E \text{ et}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = j = \phi, u \notin F_1 \cup F_2 \\ i = \phi, j = \{1\}, u \in F_1 \setminus F_2 \\ i = \phi, j = \{2\}, u \in F_2 \setminus F_1 \\ i = \phi, j = \{1, 2\}, u \in F_1 \cap F_2 \\ i = \{1\} = j, u \notin F_2 \\ i = \{1\}, j = \{1, 2\}, u \in F_2 \\ \dots \end{array} \right.$$

Question

Combien de priorités sont nécessaires
pour un jeu de type

$$\text{Reach}(F) \wedge \text{Avoid}(B) \quad ?$$

(et combien de mémoire ?) $F, B \subseteq V$

Mémoire :

b^3 - déjà visité B ($\rightarrow P_1$)

a^1 - pas visité B , pas F ($\rightarrow P_1$)

c^2 - pas visité B , visité F ($\rightarrow P_0$)

$$V' = V \times \{a, b, c, d\}$$

$$((u, \alpha), (v, \beta)) \in E' \quad \text{s.t.} \quad (u, v) \in E$$

et $\alpha = \beta = a$, $u \notin F \cup B$

$\alpha = a$, $\beta = b$, $u \in B$

$\alpha = a$, $\beta = c$, $u \in F \setminus B$

$\alpha = b = \beta$; $\alpha = c$, $u \in B$, $\beta = b$
 $\alpha = c = \beta$, $u \notin B$