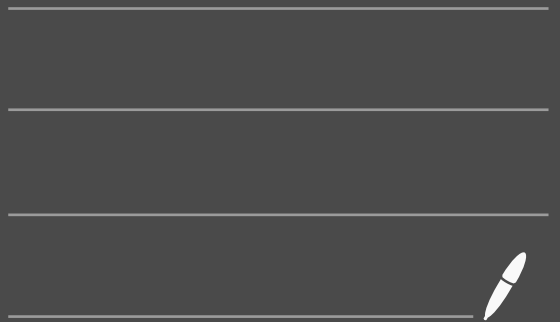


Parity games

Non-determined games



Algorithme récursif (McNaughton - Yonaka)

Parity(G)

Input: $G = (V_0, V_1, E)$, $p: V \rightarrow \{0, \dots, d\}$

Output: (w_0, w_1)

if $V = \emptyset$ return (\emptyset, \emptyset) $i \in \{0, 1\}$

$i := d \bmod 2$;

$U := \{v \in V : p(v) = d\}$ // $U \neq \emptyset$

$A := \text{Attr}_i(U)$; // attracteur de P_i
vers U

Parity($G \setminus A$) $\rightarrow (w'_0, w'_1)$

if $w'_{1-i} = \emptyset$ then

$w_i := w'_i \cup A$. $w_{1-i} := \emptyset$

return (w_0, w_1)

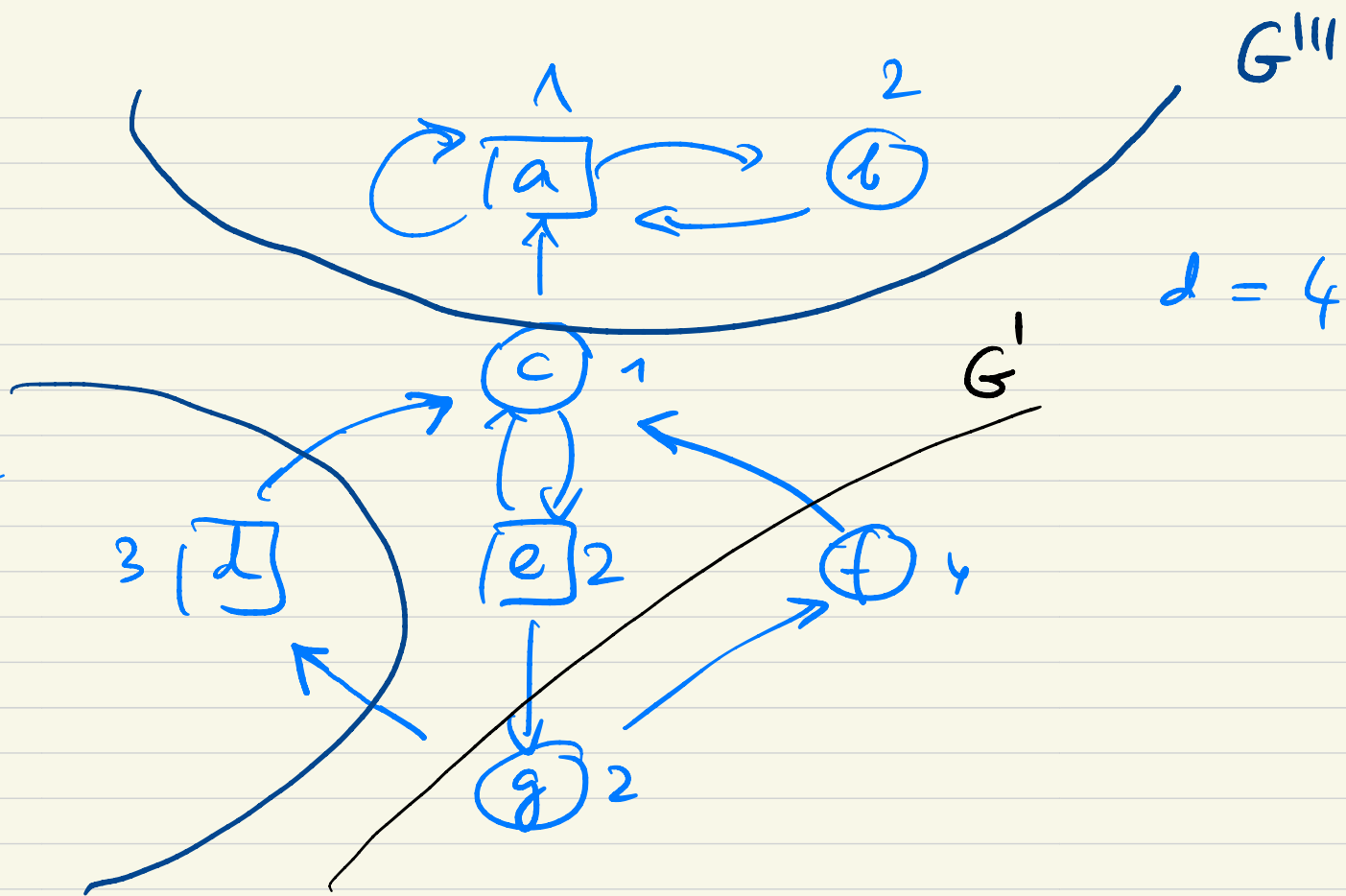
else $B := \text{Attr}_{1-i}(w'_{1-i})$ // $w'_{1-i} \neq \emptyset$

Parity($G \setminus B$) $\rightarrow (w''_0, w''_1)$

$w_i := w''_i$

$w_{1-i} := B \cup w''_{1-i}$

return (w_0, w_1)



$$i = 0$$

$$U = \{f\}$$

$$A_0 = \text{Alt}_0^G(f) = \{f, g\}$$

$$G' = G \setminus A_0 \rightarrow d = 3$$

$$i = 1$$

$$B_1 = \text{Alt}_1^{G'}(d) = \{d\}$$

$$G'' = G' \setminus B_1$$

$$\text{Parity}(G'') \rightarrow \left(\overset{W_0'}{\{c, e\}}, \overset{W_1'}{\{a, b\}} \right)$$

$$B_2 := \text{Alt}_0^{G'}(\{c, e\}) = \{c, e, d\}$$

$$G''' := G' \setminus B_2$$

$$\text{Parity}(G''') \rightarrow (\emptyset, \{a, b\})$$

$$\text{Parity}(G') \rightarrow (\overset{B_2}{\{c, c, d\}}, \{a, b\})$$

$$w_1' \neq \emptyset$$

$$B_3 := \text{Attr}_G(\{a, b\}) = \{a, b\}$$

$$G''' := G \setminus B_3$$

$$\text{Parity}(G''') = (\overset{w_0''}{\{c, d, e, f\}}, \overset{w_1''}{\emptyset})$$

Res. final

$$w_0 = \{c, d, e, f\}$$

$$w_1 = \emptyset \cup \{a, b\}$$

B_3

w_1''

$$= \{a, b\}$$

Complexité : $|V| = n, |E| = m$

$T_{n,m}(d)$

tmp. de calcul

$$T_{n,m}(d) \leq T_{n,m}(d-1) \overset{A}{\rightarrow} +$$

$$\Downarrow T_{n-1,m}(d) + O(m+n)$$

$$T_{n,m}(d) \leq O(m \cdot n^d) \rightarrow B$$

attr.

$$T_{n,m}(d) \leq T_{n,m}(d-1) + T_{n-1,m}(d) + c(m+n)$$

$$T_{n,m}(d) \leq c' \cdot m \cdot nd$$

$$c' \cdot m \cdot nd^{d-1} + c' \cdot m \cdot (n-1)^d + c \cdot (m+n) \leq c' \cdot m \cdot nd$$

$$c' \cdot m \cdot \underbrace{(nd - nd^{d-1} - (n-1)^d)}_{\alpha} \geq c \cdot (m+n)$$

$$n^d - (n-1)^d = n^{d-1} + \underbrace{n^{d-2}(n-1) + \dots + (n-1)^{d-1}}_{\alpha}$$

$$\left(\begin{array}{l} d \geq 3 \Rightarrow \alpha \geq n^2, \quad c' = 2c \\ d = 1, 2: \quad T_{n,m} \in O(n(m+n)) \end{array} \right)$$

Rq. Si d est fixé, la complexité est polynomiale (dans la taille de l'arête).

Rq

$$p: V \rightarrow \{1, 2\}$$

Būdi (accessibilité répétée)

$$d = 2 \\ i = 0$$

$$F = \{v : p(v) = 2\}$$

$$A = \text{Altr}_0(F)$$

$$(\text{Parity}(G \setminus A) \rightarrow (W_0', W_1'))$$

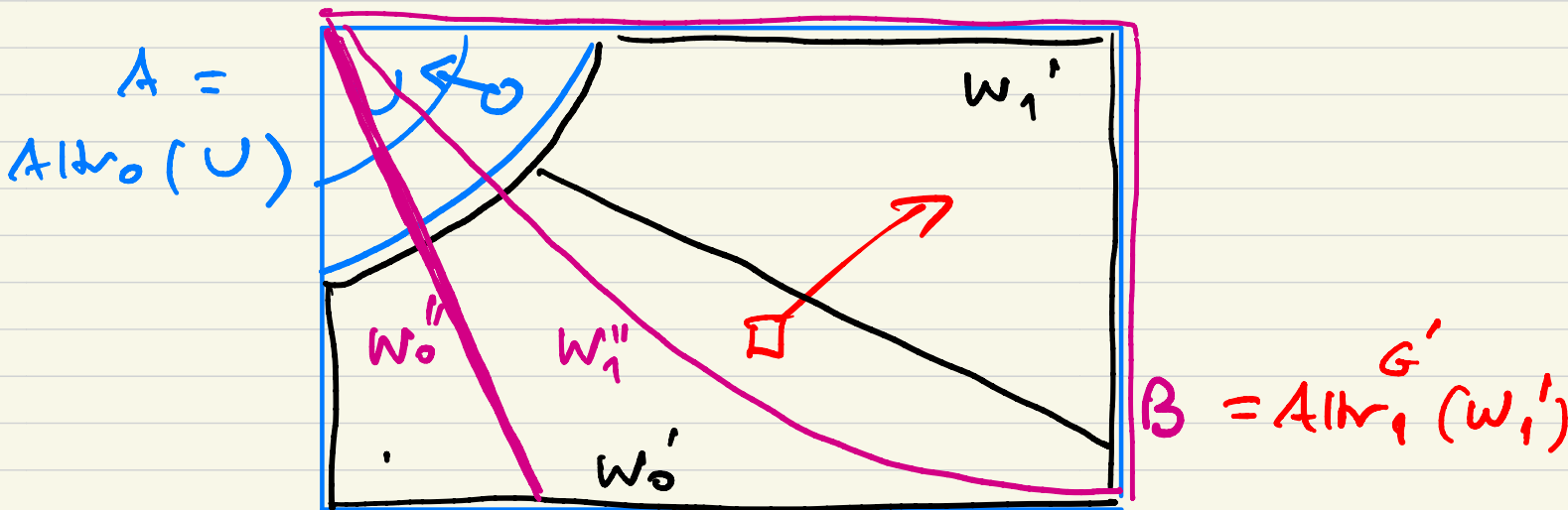
$$[\text{if } W_1' = \emptyset : \text{return}(A \cup W_0', \emptyset)]$$

else $B = \text{Altr}_1(W_1')$

$$\text{Parity}(G \setminus B) \rightarrow (W_0'', W_1'')$$

$$\text{return}(W_0'', B \cup W_1'')$$

d pair



On montre par récurrence que l'algo de McLaughlin - Stankovic calcule les régions gagnantes W_0, W_1 tq. $V = W_0 \cup W_1$, et que les stratégies gagnantes sont positionnelles.

Supposons $i = 0$.

Cas 1 $W_1^1 = \emptyset \rightarrow W_1 = \emptyset$
 $W_0 = A \cup W_0^1$

σ_0 : strat. d'attracteur dans A ,
 et strat. pos. σ_0^1 sur W_0^1

Cas 2 $B = \text{Attr}_1(W_1')$, $G'' = G \setminus B$

$\rightarrow W_0 = W_0''$, $W_1 = B \cup W_1''$

$\sigma_0 \rightarrow$ strat. gagn. σ_0'' sur W_0''

$\sigma_1 \rightarrow$ strat. d'attraction sur B ;

dès que la partie arrive dans

W_1' : str. gagn. pos. σ_1' sur W_1'

Rq $W_0'' \subseteq W_0$ avec σ_0 :

Parce que $G \setminus B$ est piège pour P_1

On montre que P_1 gagne sur W_1

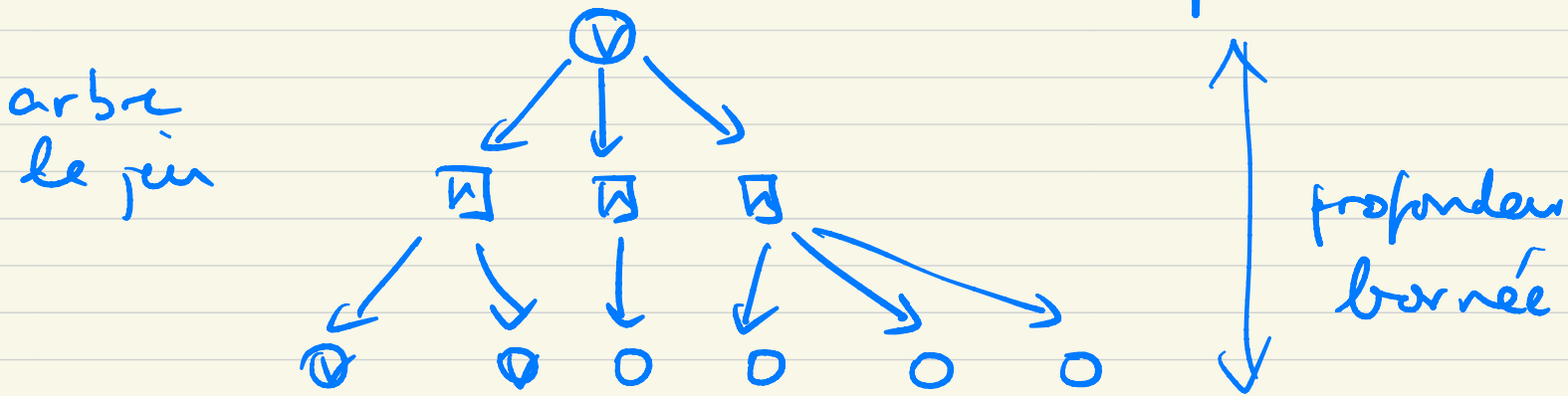
avec σ_1 :

a) si la partie commence dans B ,
alors elle atteint forcément W_1'
et y reste : P_1 gagne avec σ_1'

b) si la partie commence dans W_1'' :
soit elle y reste , ou elle va dans B
(P_1 gagne avec σ_1'') \rightarrow cas a)

Jeux déterminés

Jeux finitaires : nb. fixé de coups



Les jeux finitaires sont déterminés.

$$P_0 : \begin{matrix} \vee \\ \exists \end{matrix}$$

$$P_1 : \begin{matrix} \wedge \\ \forall \end{matrix}$$

$$P_0 \text{ gagne si } \exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \forall d_2 \dots$$

(c_1, d_1, \dots) gagnent pour P_0
 c_i : coups de P_0
 d_i : " " P_1

$$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots)$$

$$= \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2 \dots$$

(c_1, d_1, \dots) gagnent pour P_1

Rq. Pour les jeux infinitaires,
l'argument "à la de Morgen"
ne marche plus :

$$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots) \neq \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2$$

Considérons le jeu suivant (Choquet):

P_0, P_1 jouent, en alternance, des
intervalles ouverts de \mathbb{R} :

$$\mathbb{R} \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

P_0 commence par $I_0 = (0, 1)$

P_0 gagne si $\bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$

Rq P_0 peut gagner, mais ce n'est
pas évident comment.

Supposons que P_0 choisit I_j .

l'intervalle choisi par P_1 avant (parce que c'est le plus grand). Alors P_0 perd:

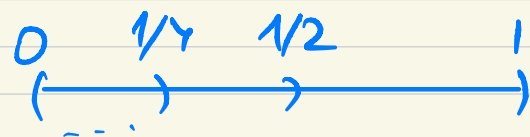
$$P_0 : (0, 1)$$

$$P_1 : (0, 1/2)$$

$$P_0 : (0, 1/2)$$

$$P_1 : (0, 1/4)$$

\vdots



$$\bigcap_{n \geq 0} (0, \frac{1}{2^n}) = \emptyset$$

Mais P_0 peut gagner ce jeu !

La stratégie de P_0 est de choisir $I_n = (a_n, b_n)$ tq.

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$$a \leq b$$

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$$

* Un jeu inférentaire qui n'est pas déterminé : on utilisera l'axiome du choix (AC)

On cherche un "XOR infini", qui sera une fonction $f: \{0,1\}^{\omega} \rightarrow \{0,1\}$

↑
suites binaires
infinies

avec la propriété :

si $w, w' \in \{0,1\}^{\omega}$ diffèrent seulement à une position, alors $f(w) \neq f(w')$

|| L'axiome du choix nous dit qu'une telle fonction f existe.

dém Considérons la relation d'équivalence suivante sur $\{0,1\}^{\omega}$:

$w \sim w'$ si w, w' diffèrent sur un nombre fini de positions

Soit $S \subseteq \{0,1\}^{\omega}$ un ensemble de représentants, un pour chaque classe d'équivalence (\rightarrow AC)

Pour $w \in \{0,1\}^{\omega}$ on écrit

$r(w) \in S$ le représentant de la classe de w ($\{w' : w' \sim w\}$)

On déf.

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ et } r(w) \\ & \text{diffèrent sur nb.} \\ & \text{pair de positions} \\ 0 & \text{sinon (impair)} \end{cases}$$

Rq si w, w' diffèrent sur une position exactement \Rightarrow

- $f(w) \neq f(w')$
- $r(w) = r(w') = r$ ($w \sim w'$)

Avec f on déf. le jeu suivant :

- P_0, P_1 jouent en alternance, chaque coup correspond à un mot de $\{0,1\}^*$
- P_0 joue u_i , P_1 joue v_i

Partie : $\alpha = u_0 v_0 u_1 v_1 \dots \in \{0,1\}^\omega$

P_0 gagne la partie si : $f(\alpha) = 1$

Ce jeu n'est pas déterminé.

On le démontre par contradiction, en supposant que P_1 a une stratégie gagnante σ_1 (l'autre cas est symétrique).

On montre qu'on peut construire une partie gagnée par P_0

(\rightarrow contradiction au fait que σ_1 est gagnante pour P_1)

Si P_0 commence par $u_0 = 0$
 alors soit $v_0 = \sigma_1(0)$ la
 réponse de P_1 . $0 \ v_0 \ u_1 \dots$

Posons maintenant ("rol de stratégie")

$$u'_0 = 1 \ v_0 \quad (P_0 \text{ joue})$$

$$\underbrace{1 \ v_0}_{u'_0} \quad v'_0 \quad u'_1$$

$P_0 \quad P_1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} P_0 \text{ joue } \sigma_1$

P_0 joue σ_0 :

- premier coup : $1 \ v_0$

- à partir du 2ème coup : σ_1

Pour le mot $\alpha' = (1 \ v_0) (v'_0) (u'_1) \dots$

on a le parti $\alpha = (0) (v_0) (v'_0) (u'_1) \dots$

où P_1 joue σ_1 , donc

α est gagné par P_1 . $\rightarrow f(\alpha) = 0$

α' est gagné par P_0 : $f(\alpha') = 1$

Donc, σ_i n'est pas stratégie optimale pour $P_i \rightarrow$ contradiction.

Pour les jeux infinitésimes il y a une classe de conditions de victoire \rightarrow **conditions de Borel** pour laquelle on sait que les jeux sont **déterminés**.

Borel

On déf. une topologie sur $\{0, 1\}^{\omega}$.

$$d(w, w') = 2^{-(n+1)}, \text{ où}$$

$n =$ longueur maximale d'un préfixe commun de w, w'

ex $w = w' \quad d(w, w) = 2^{-\infty} = 0$

$w = 0^n, w' = 1^n$

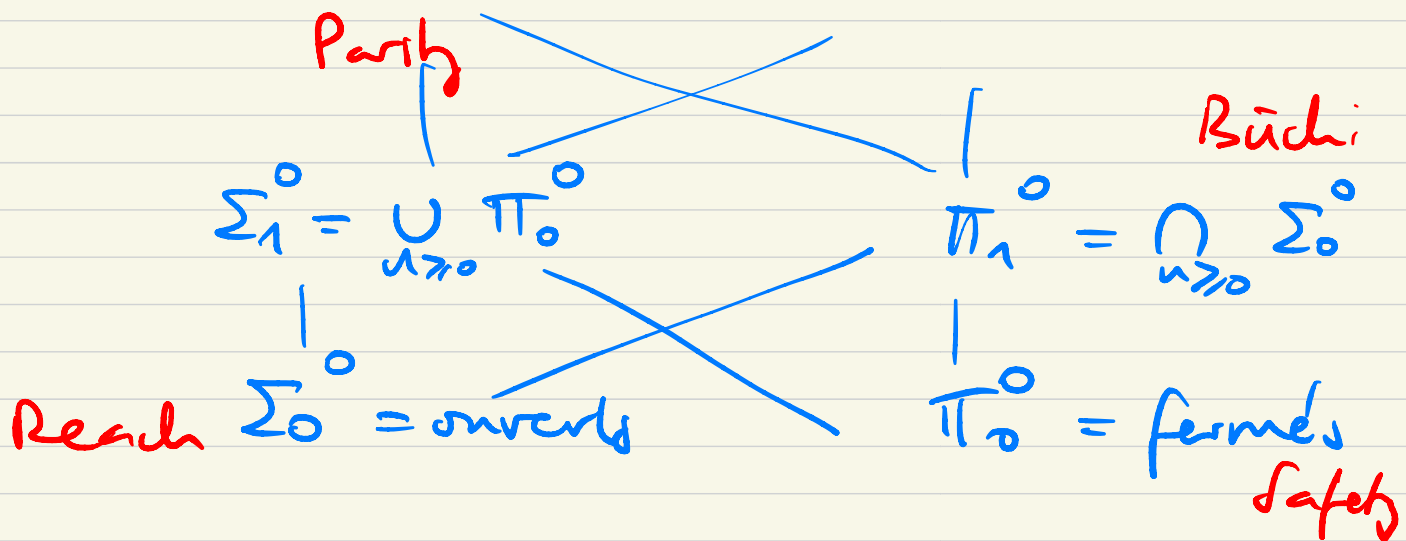
$d(w, w') = \frac{1}{2}$ etc.

Ouverts : $X \cdot \{0,1\}^\omega$ $X \subseteq \{0,1\}^*$

Les ensembles boréliens sur $\{0,1\}^\omega =$
 la plus petite classe de sous-ensembles de $\{0,1\}^\omega$ qui

- contient les ouverts et les fermés
- est fermée par $\bigcup_{n \geq 0}$ et $\bigcap_{n \geq 0}$.

Hiérarchie de Borel :



Ih(Parikh) Tout jeu avec
 condition de victoire = ens.
 de Borel est déterminé.