

# Théorème de Nash

---

---

---

---



# Algorithme pour résoudre les jeux à 2 joueurs et somme nulle

Jeu décrit par 2 matrices  $R, C$   
de dimension  $m \times n$ . row column

( $R = -C$  si somme nulle)

$$\Delta S_R = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m : \sum x_i = 1 \}$$

$$\Delta S_C = \{ \bar{y} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : \sum y_j = 1 \}$$

Etant données  $\bar{x}, \bar{y}$ , le payoff de  $R$  est  $\bar{x}^T R \bar{y}$ . ( $C : \bar{x}^T C \bar{y}$ )

$(\bar{x}, \bar{y})$  est éq. de Nash ssi

$$\bar{x}^T R \bar{y} \geq \bar{x}'^T R \bar{y}, \quad \forall \bar{x}'$$

$$\bar{x}^T C \bar{y} \geq \bar{x}^T C \bar{y}', \quad \forall \bar{y}'$$

$R$ : max,  $C$ : min

Zero-sum :  $C = -R$

EX	Gouv Electus	E:	I:
		Energie renouv.	Redu Myobs
A:	Retraites entreepée	3, -3	-1, 1
D:	Hausse depenses	-2, 2	1, -1

Si joueur R annonce la strategie  $\bar{x} = (x_A, x_D)$  alors joueur C obtient:  
la perte esperée :

$$E(E) = 3x_A - 2x_D$$

$$E(I) = -x_A + x_D$$

Valeur optimale pour C :

$$\min \{ 3x_A - 2x_D, -x_A + x_D \}$$

Si R doit annoncer sa strategie  $\bar{x}$  en premier, alors le choix opt. est  
 $\max_{(x_A, x_D)} \min \{ 3x_A - 2x_D, -x_A + x_D \}$

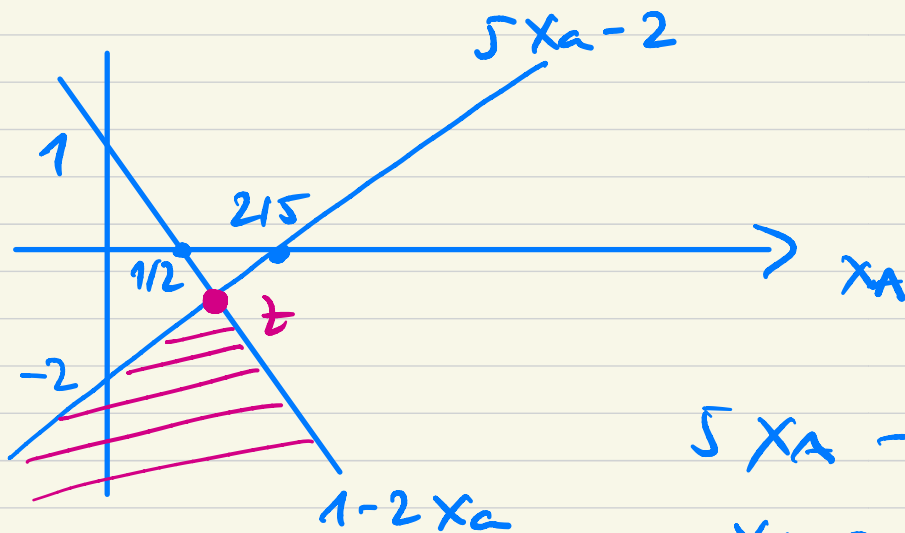
le choix opt de R est donc la solution du pb. d'optimisation suivant :

$$\max z \quad \text{tq.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_A - 2x_D \geq z \\ -x_A + x_D \geq z \\ x_A + x_D = 1 \\ x_A, x_D \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{LPR}$$

$$z \leq 3x_A - 2(1 - x_A) = 5x_A - 2$$

$$z \leq 1 - 2x_A$$



$$5x_A - 2 = 1 - 2x_A$$

$$x_A = \frac{3}{7}$$

$$x_D = \frac{4}{7}$$

$$z = \frac{1}{7}$$

le choix opt. de C :

max  $w$  tq.

$$\left\{ \begin{array}{l} -3y_E + y_I \geq w \\ 2y_E - y_I \geq w \\ y_E + y_I = 1 \\ y_E, y_I \geq 0 \end{array} \right. \quad LP_C$$

$$\leadsto y_E = \frac{2}{7}, y_I = \frac{5}{7}, w = -\frac{1}{7}$$

Résultat si R joue  $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$  et

C joue  $(\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$  alors R gagne  $1/7$  et C perd  $1/7$ .

- si R joue  $(\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ , C ne peut pas perdre plus, à cause de  $LP_R$
  - si C joue  $(\frac{2}{7}, \frac{5}{7})$ , R ne peut pas gagner plus, à cause de  $LP_C$ .
- donc on a un éq. de Nash!

$$\max_x \min_y x^T R y \quad : \quad \text{gain maximal de } R$$

$$\max_y \min_x x^T C y \quad : \quad \text{--- de } C$$

|| (\*)

$$- \min_y \max_x x^T R y \quad (\text{perte minimale})$$

$$(*) \quad \max_y \min_x x^T C y \quad \begin{matrix} C = -R \\ = \end{matrix}$$

$$\max_y \min_x (-x^T R y) \quad =$$

$$- \min_y \max_x x^T R y$$

Le thm. Minimax suivant dit que le gain maximal de  $R$  est égal à la perte minimale de  $C$ .

## Le théorème Min-Max (von Neumann)

Etant donné:  $R \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,

$$\max_x \min_y x^T R y = \min_y \max_x x^T R y$$

$\rightarrow$   $\max_x \min_y x^T R y$  est la sol.  
optimale de:

LP<sub>R</sub>:

$$\begin{cases} \max z & \text{tg.} \\ x^T R \geq z \cdot \bar{1}^T \\ x^T \cdot \bar{1} = 1 \\ x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, m \end{cases}$$

En optimisation linéaire (LP):

LP primal	LP dual
$\max (c^T x)$ tg.	$\min (b^T y)$ tg.
$Ax \leq b$	$A^T y \geq c$
$x \geq 0$	$y \geq 0$

le théorème de dualité forte :

$$\text{On a } \max_x (c^T x) = \min_y (b^T y)$$

si un des deux LP a une solution optimale.

LP<sub>R</sub> a des sol., et elles sont bornées  $\rightarrow$  sol. opt. existe

Dual de LP<sub>R</sub> :  $\min z'$  tq.

$$\text{LP}' : \begin{cases} -y^T R^T + z' \bar{1}^T \geq 0 \\ y^T \cdot \bar{1} = 1 \\ y_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

On met  $z'' = -z'$ , et on applique  $C = -R$  pour réécrire LP' :

$\max z''$  tq.

$$\text{LP}_C : \begin{cases} C y \geq z'' \cdot \bar{1} \\ y^T \cdot \bar{1} = 1 \\ y_j \geq 0, \quad \forall j \end{cases}$$

## Rappels

$$C = -R$$

1) L<sub>P<sub>C</sub></sub> est le pb. d'optimisation obtenu si C annonce sa stratégie en premier.

2) La valeur opt. de z'' est

$$\max_y \min_x (x^T C y)$$

$$3) \max_y \min_x (x^T C y) = - \min_y \max_x (x^T R y)$$

Thm Si  $(x, z)$  est sol. opt. de L<sub>P<sub>R</sub></sub> et  $(y, z'')$  est sol. opt. de L<sub>P<sub>C</sub></sub>, alors  $(x, y)$  est éq. de Nash, et  $z'' = -z$ .

dém 1)  $x^T R \geq z \bar{1}^T \Rightarrow$

$$(1) \quad \forall y: \quad x^T R y \geq z \quad (1 = \bar{1}^T y)$$

2)  $C y \geq z'' \cdot \bar{1} \Rightarrow$

$$(2) \quad \forall x: \quad \begin{array}{l} x^T C y \geq z'' \\ x^T R y \leq -z'' \end{array}, \text{ donc}$$

Si  $C$  joue le strat.  $y$  :

-  $R$  gagne au plus  $-z'' = z$  (eq. (2))  
↑ (dualité)

-  $R$  gagne au moins  $z$  (eq. (1))

$\Rightarrow$  donc  $R$  gagne exactement  $z$

$\Rightarrow x$  est le strat. opt. de  $R$

de façon enveloppe,  $y$  est le strat. opt. de  $C$ .

---

On peut montrer aussi :

Si  $(x, y)$  est éq. de Nash, alors

$(x, x^T R y)$  est sol. opt. de  $LP_R$

et  $(y, -x^T C y)$  est sol. opt. de

$LP_C$ .

Ordre d'élimination n'est pas important.

(1)  $s_i$  éliminée par  $m_i$ , puis

(2)  $s_j$  — — — — —  $m_j$

$$p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(m_i, m_{-i}), \forall m_{-i}$$

$$\Rightarrow \exists \hat{s}_i \in \text{supp}(m_i) :$$

$$p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(\hat{s}_i, m_{-i}), \forall m_{-i}$$

-  $j \neq i \Rightarrow$  (2), puis (1) possible

-  $j = i \Rightarrow s_i \notin \text{supp}(m_i)$

$s_i$   $s'_i \notin \text{supp}(m_i) : (2)$ , puis (1) possible

$s_i$   $s'_i \in \text{supp}(m_i) :$

$$m_i'' := m_i [s'_i \leftarrow \hat{s}_i']$$

$$p_i(s'_i, m_{-i}) < p_i(\hat{s}_i', m_{-i}), \forall m_{-i}$$

$$\Rightarrow p_i(s_i, m_{-i}) < p_i(m_i'', m_{-i}), \forall m_{-i}$$

Donc (2), ensuite (1') :  $s_i$  est éliminée par  $m_i''$ .