

Champ, Norm

---

---

---

---



# IF 222 : Introduction aux jeux

Anca Muscholl

anca@labri.fr

www.labri.fr/~anca/Games.html

→ Encdrb

## Plan

① Jeux combinatorics

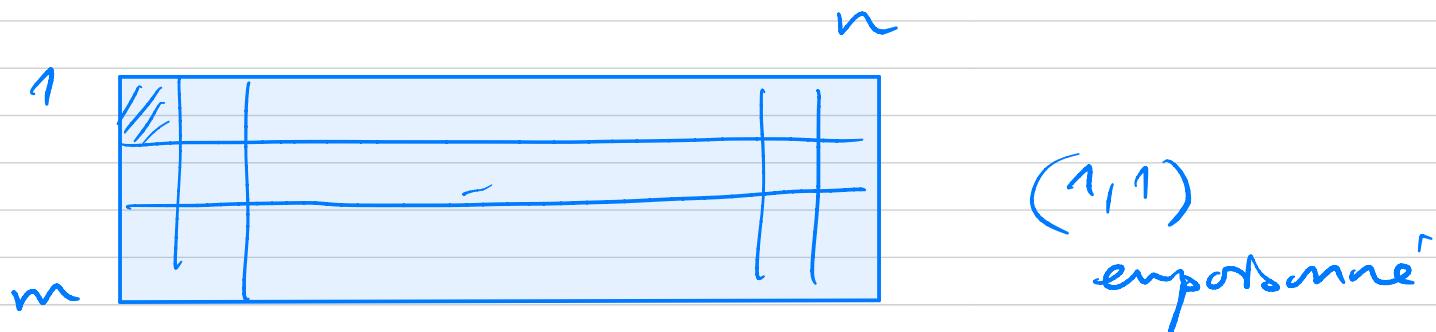
(→ vocabulaire)

② Jeux et logique / vérification

③ Jeux stratégiques

## ① Jeux combinatoires

### Chomp (tablette de chocolat)



2 joueurs  $P_1, P_2$ , qui jouent des coups de façon alternée \*

coup : choisir carré  $(i, j)$  et enlever tous les  $(k, l)$  tq.  $k \geq i, l \geq j$ .

Celui qui prend  $(1, 1)$  perd, l'autre gagne.

\*  $P_1$  commence

Partie de jeu : séquence de coups alternés de  $P_1, P_L$ , avec  $P_1$  qui commence

$\Pi$  :  $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots$

$c_i$  : coup de  $P_1$ ,  $d_i$  : coup de  $P_L$

Rq) Ici les parties sont finies

2) Une partie maximale est gagnée par le joueur qui n'a pas joué en dernier.

Stratégie de  $P_i$  : façon de jouer un coup, selon la partie qui a été jouée jusqu'à là.

$\sigma_i$  = stratégie de  $P_i$

$C = [1..m] \times [1..n]$  ens. des coups

$\sigma_1 : (CC)^* \rightarrow C$  (fct. partelle)

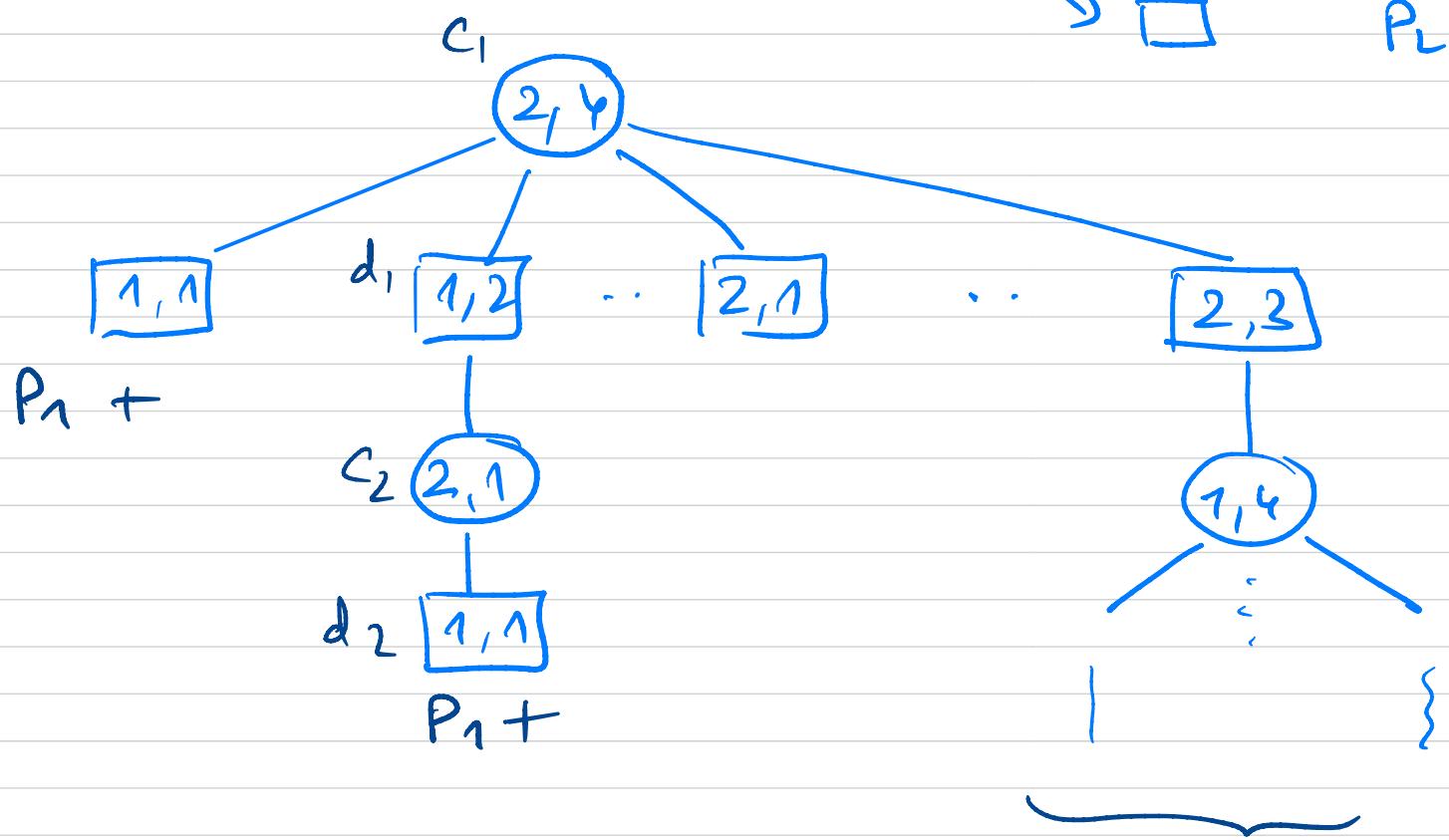
$\sigma_2 : C(CC)^* \rightarrow C$

1	2	3	4
1		2	
2			1

Ex  $m=2, n=4$

Arbre de jeu  $\rightarrow$  noeuds  $\rightarrow$   $\circ$   $P_1$

$\rightarrow \square$   $P_2$



$P_1$  a une stratégie gagnante  $\sigma_1$ :

en jouant selon  $\sigma_1$ , elle gagne

toutes les parties, que l'on votent

des coups de  $P_2$ .

Champ :

- jeu à 2 joueurs
- jeu fini
- jeu à somme nulle : toute partie gagnée par  $P_1$  est perdue par  $P_2$ , et vice-versa

Jux stratégiques : ce que gagne un joueur, l'autre le perd

- jeu déterminé : soit  $P_1$  ou  $P_2$  a stratégie gagnante

(plus tard : tout jeu fini est déterminé)

## 2 cas

### ① $m = n$

On montre une stratégie gagnante de  $P_1$

$P_1$  commence avec  $(2, 2)$

Si  $P_2$  joue  $(1, i)$  alors  $P_1$

répond  $(i, 1)$  ;

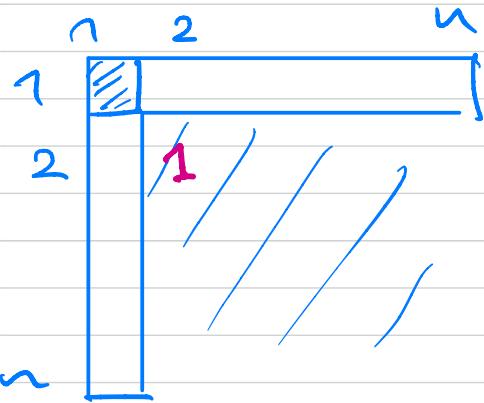
et vice-versa

→  $P_1$  gagne toutes les parties

### ② $m, n$ arbitraires

On montre juste l'existence d'une stratégie gagnante de  $P_1$ .

Technique "vol de stratégie"



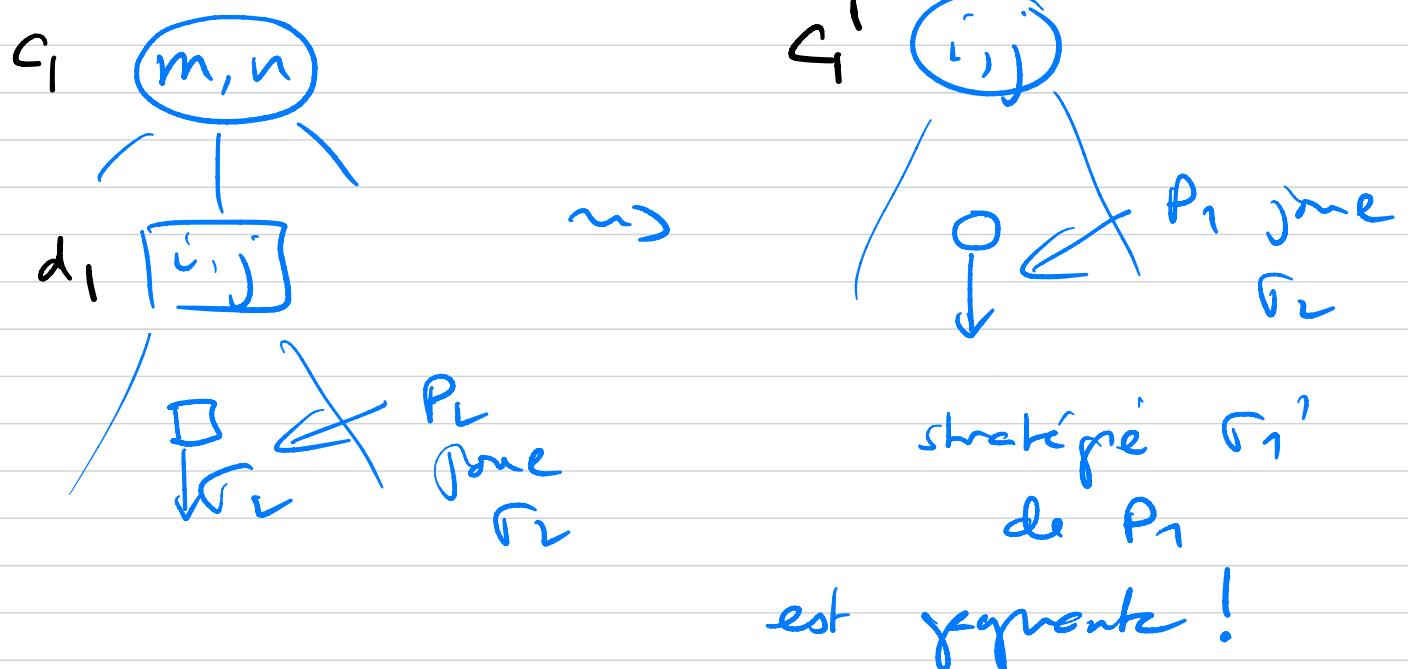
Supposons par contradiction que

Pr a une vraké gré gagnante  $F_2$

Si  $P_1$  commence par  $(m, n)$  : supposons que  $P_2$  joint  $(i, j)$  ensuite ( $\rightarrow$ dm  $R_2$ ).

## Vol de stratégie :

$P_1$  commence par  $(i, j')$  et continue par  $\sigma_2 \rightarrow$  stratégie  $\sigma_1$



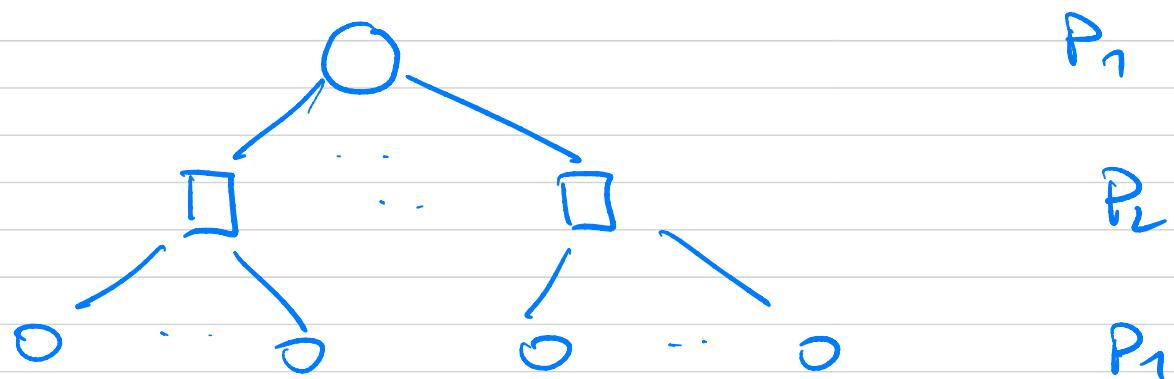
→ contradiction à l'hypothèse  
que  $P_2$  a une stratégie  
gagnante

- On vient de voir que  $P_2$  ne peut pas avoir de stratégie gagnante.
- Si on montre que Chomp est déterminé alors ça implique que  $P_1$  a une stratégie gagnante.

Tout jeu fini\* est déterminé

\* (sans parties infinies)

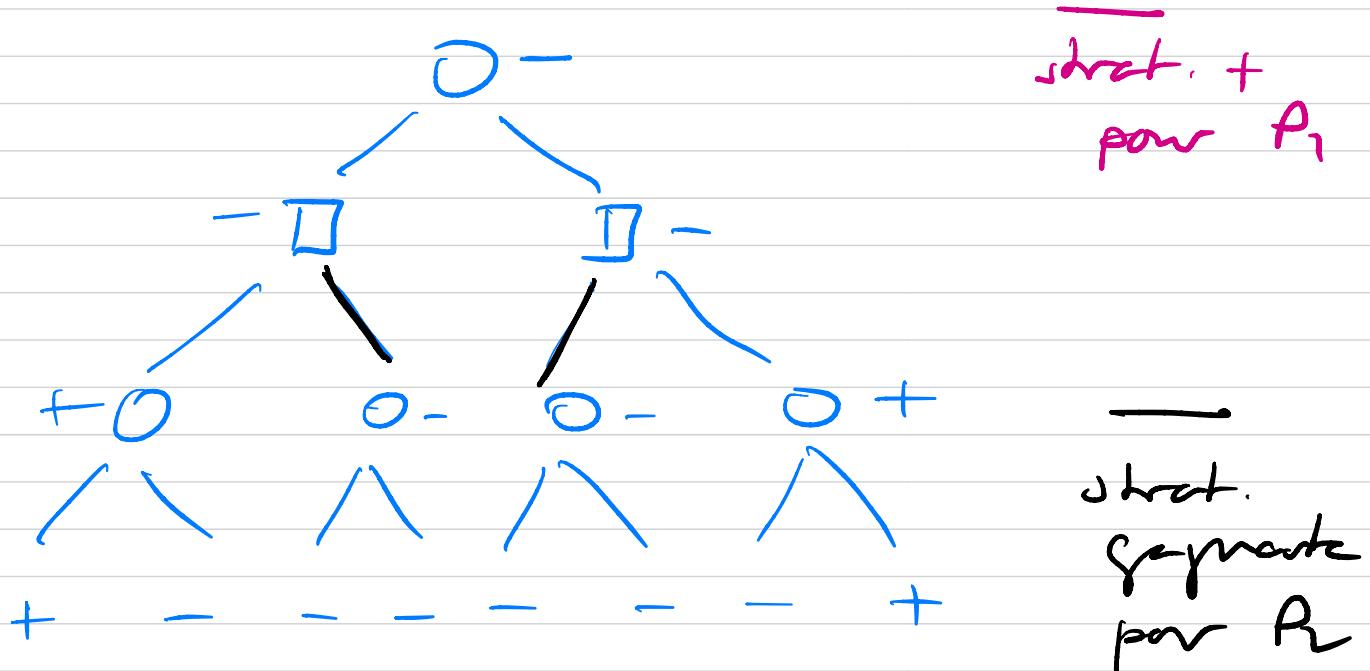
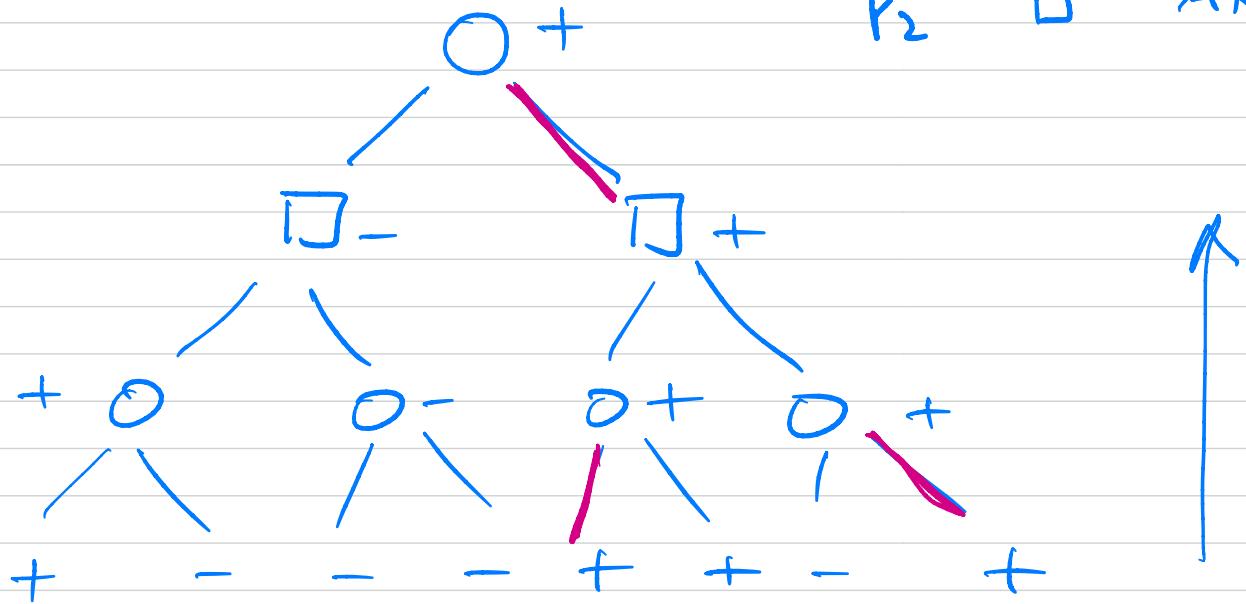
Arbre de jeu (fini)



familles + / -

+ : gagné par  $P_1$   
- : gagné par  $P_2$

$P_1$     $\circ$    OR  
 $P_2$     $\square$    AND



② Kim p tas de jetons , avec  
 $n_1, \dots, n_p$  jetons

Comp: choisir un tas et enlever  
 $\geq 1$  jeton de ce tas

le joueur qui prend le dernier  
jeton gagne . ( P1 commence )

XOR binaire :

$$6 \text{ XOR } 3 = 110 \text{ XOR } 011 = 101$$

1

Th (Bonbon, 1902)

$\alpha = (n_1, \dots, n_p)$  est gagnante pour le  
joueur qui commence

$$\Leftrightarrow n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p \neq 0$$

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_p)\| := \sum_{i=r}^p \alpha_i$$

Preuve par induction sur  $\|\alpha\|$  :

1)  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$  - preuve par  $P_K$

2)  $\|\alpha\| > 0$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_p)$$

$\alpha$  est + pour  $P_K \Leftrightarrow \alpha_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } \alpha_p \neq 0$

2a) suppose  $\underbrace{\alpha_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } \alpha_p}_a \neq 0$

On cherche  $i$  tel que  $\alpha_i < \alpha_j$  tq  $\alpha_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } \alpha_i \dots \text{ XOR } \alpha_p = 0$

Soit  $r$  le bit le plus fort de  $a$  égal à 1. Donc il ex.  $1 \leq i \leq p$  tq. le réme bit de  $\alpha_i$  est 1.

$$m_i := \overbrace{n_i \text{ XOR } a}^{\rightarrow} < n_i$$

Dans ce cas :  $P_K$  réduit le temps de mi

$$n_1 \text{ XOR } \dots \text{ } \overset{m_i}{\textcircled{m_i}} \text{ XOR } \dots \text{ } n_p = \\ n_i \text{ XOR } \dots$$

$$a \text{ XOR } a = 0$$

→  $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_p)$  perdant  
par  $P_{3-K}$

26) Suppose  $g$  is in  $\text{XOR}..$   $\text{XOR}$  up  
 $= 0$

On veut montrer que c'est perdu

pour  $P_{1-2}$ , donc segment pour  $P_{3-4}$

Donc  $P_{3-k}$  signe après tous les wps possibles de  $P_k$

$$\mathcal{L} = (n_1, \dots, n_p), \mathcal{L}' = (n_1, \dots, m_i, \dots)$$

Sort  $b = n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_i \text{ XOR } n_{i+1} \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p$

$$b \text{ XOR } n_i = 0 \Rightarrow b \text{ XOR } m_i \neq 0$$

$$\forall m_i < n_i$$