

Chomp, Niche

---



# IF222: Introduction aux jeux

Anca Muscholl      [anca@labri.fr](mailto:anca@labri.fr)

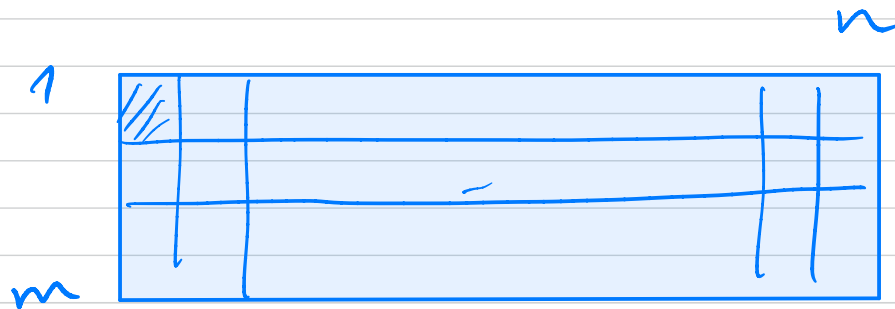
[www.labri.fr/~anca/Games.html](http://www.labri.fr/~anca/Games.html)  
→ Enscr

## Plan

- ① Jeux combinatoires  
(→ vocabulaire)
- ② Jeux et logique / vérification
- ③ Jeux stratégiques

# ① Jeux combinatoires

Chomp (tablette de chocolat)



$(1,1)$   
empoisonnée\*

2 joueurs  $P_1, P_2$ , qui jouent des coups de façon alternée\*

coup : choisir carré  $(i,j)$  et enlever tous les  $(k,l)$  tq.  
 $k \geq i, l \geq j$ .

Celui qui prend  $(1,1)$  perd,  
l'autre gagne.

\*  $P_1$  commence

Partie de jeu : séquence de coups alternés de  $P_1, P_2$ , avec  $P_1$  qui commence

$\pi$  :  $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots$

$c_i$  : coups de  $P_1$ ,  $d_i$  : coups de  $P_2$

Rq 1) Ici les parties sont finies

2) Une partie maximale est gagnée par le joueur qui n'a pas joué en dernier.

Stratégie de  $P_i$  : façon de jouer un coup, selon la partie qui a été jouée jusque là.

$\sigma_i$  = stratégie de  $P_i$

$C = [1..m] \times [1..n]$  ens. des coups

$\sigma_1 : (CC)^* \rightarrow C$  (fct. partielles)

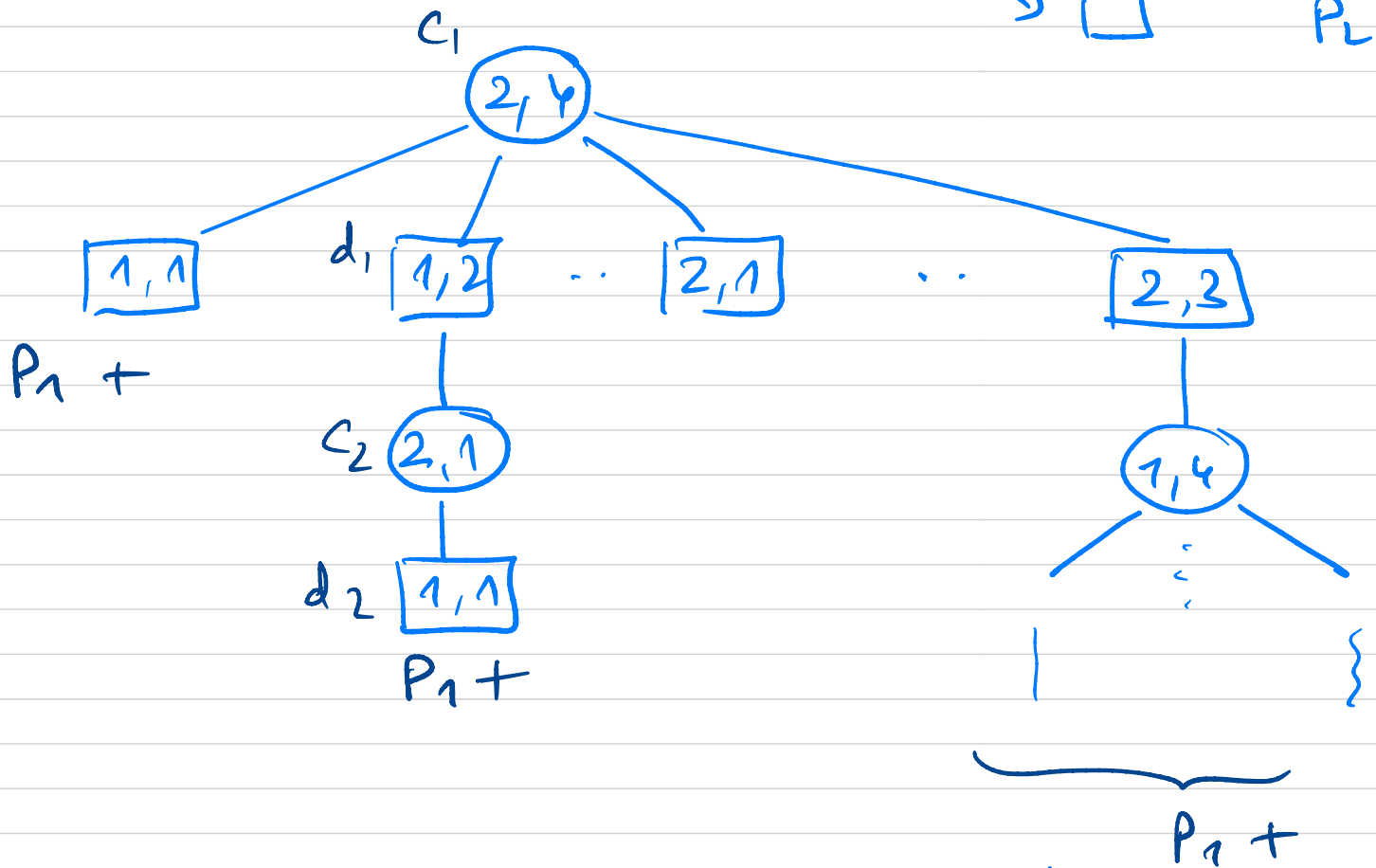
$\sigma_2 : C(CC)^* \rightarrow C$



Ex  $m=2, n=4$

	1	2	3	4
1		2	/	/
2	1	/	/	1

Arbre de jeu  $\rightarrow$  noeuds  $\rightarrow \bigcirc$   $P_1$   
 $\rightarrow \square$   $P_2$



$P_1$  a une stratégie gagnante  $\sigma_1$ :

en jouant selon  $\sigma_1$ , elle gagne  
 toutes les parties, quelque soient  
 les coups de  $P_2$ .

## Champs :

- jeu à 2 joueurs

- jeu fini

- jeu à somme nulle :

toute partie gagnée par  $P_1$  est perdue par  $P_2$ , et vice-versa

Jux stratégiques : ce que gagne un joueur, l'autre le perd

- jeu déterminé : soit  $P_1$  ou  $P_2$  a stratégie gagnante

( plus tard : tout jeu fini est déterminé )

## 2 cas

### ① $m = n$

On montre une stratégie gagnante de  $P_1$

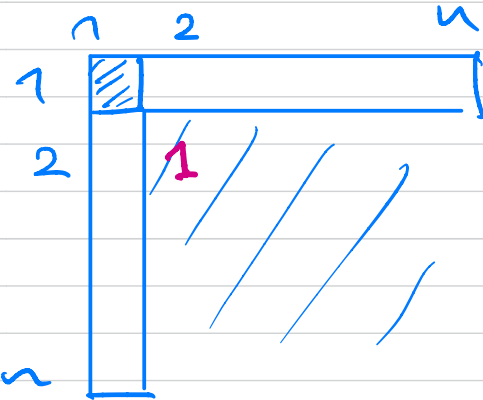
$P_1$  commence avec  $(2, 2)$

Si  $P_2$  joue  $(1, i)$  alors  $n$

$P_1$  répond  $(i, 1)$  ;

et vice-versa

→  $P_1$  gagne toutes les parties



### ② $m, n$ arbitraires

On montre juste l'existence d'une stratégie gagnante de  $P_1$ .

Technique "vol de stratégie"

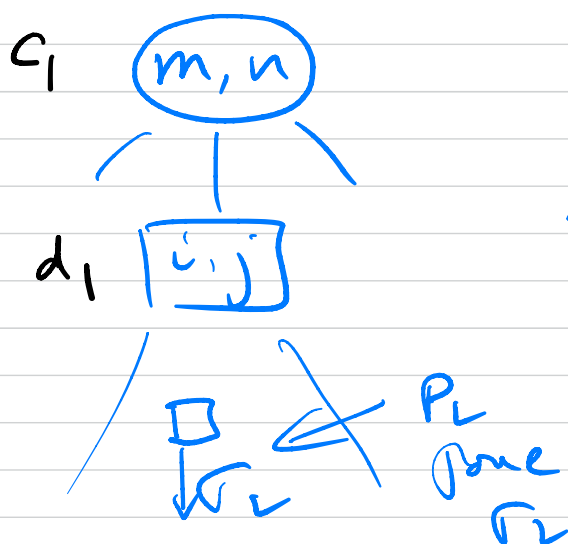
Supposons par contradiction que

$P_2$  a une stratégie gagnante  $\sigma_2$

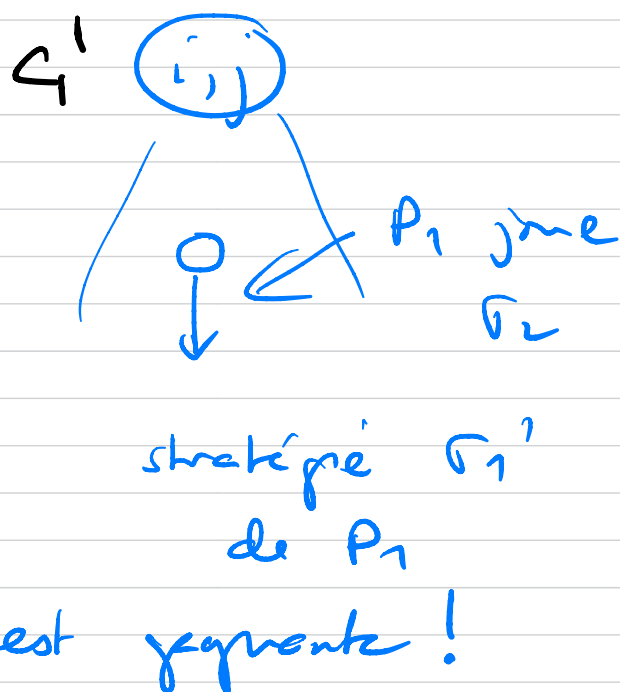
Si  $P_1$  commence par  $(m, n)$  : supposons  
que  $P_2$  joue  $(i, j)$  ensuite (selon  $\sigma_2$ ).

Vol de stratégie :

$P_1$  commence par  $(i, j)$  et  
continue par  $\sigma_2 \rightarrow$  stratégie  $\sigma_1'$



$\leadsto$



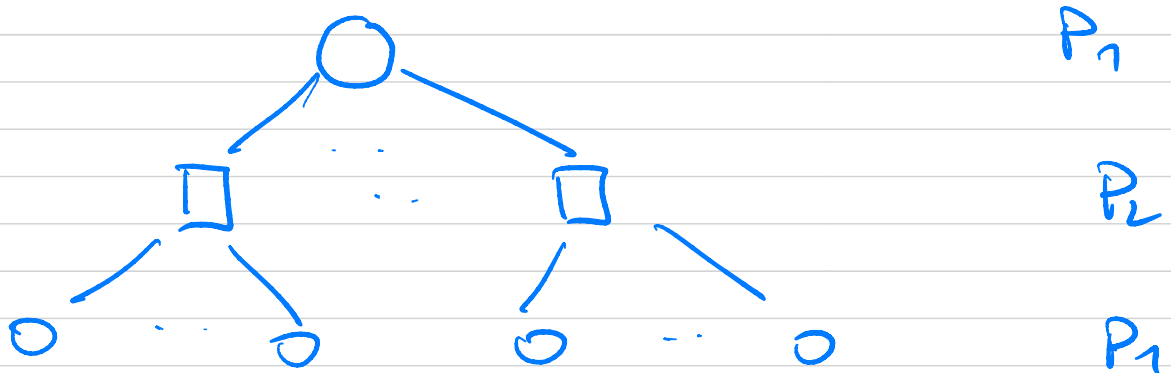
$\rightarrow$  contradiction à l'hypothèse  
que  $P_2$  a une stratégie  
gagnante

- On vient de voir que  $P_2$  ne peut pas avoir de stratégie gagnante.
- Si on montre que  $\text{Chomp}$  est déterminé alors ça implique que  $P_1$  a une stratégie gagnante.

Tout jeu  $\text{fini}^*$  est déterminé

\* (sans parties indéfinies)

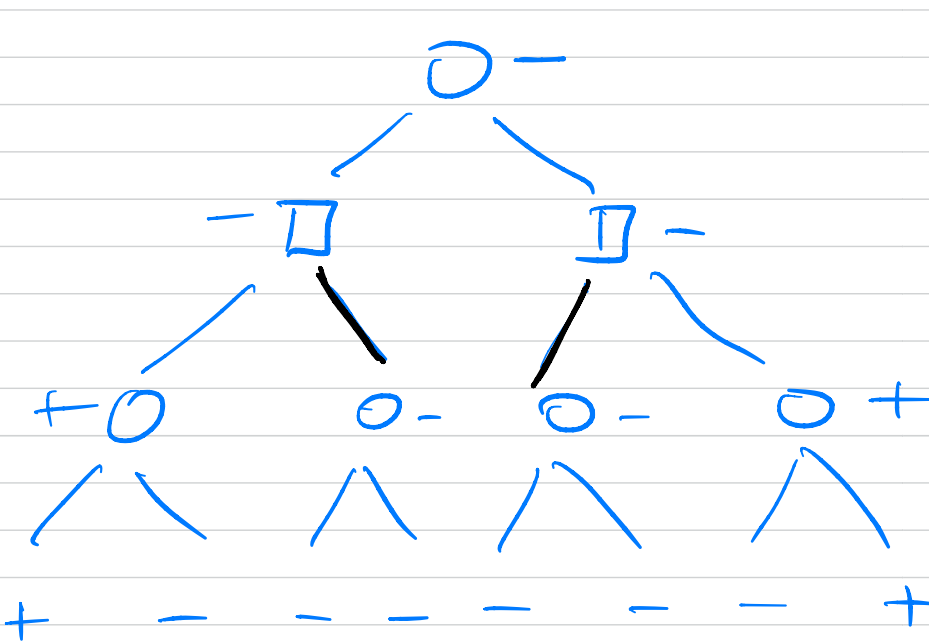
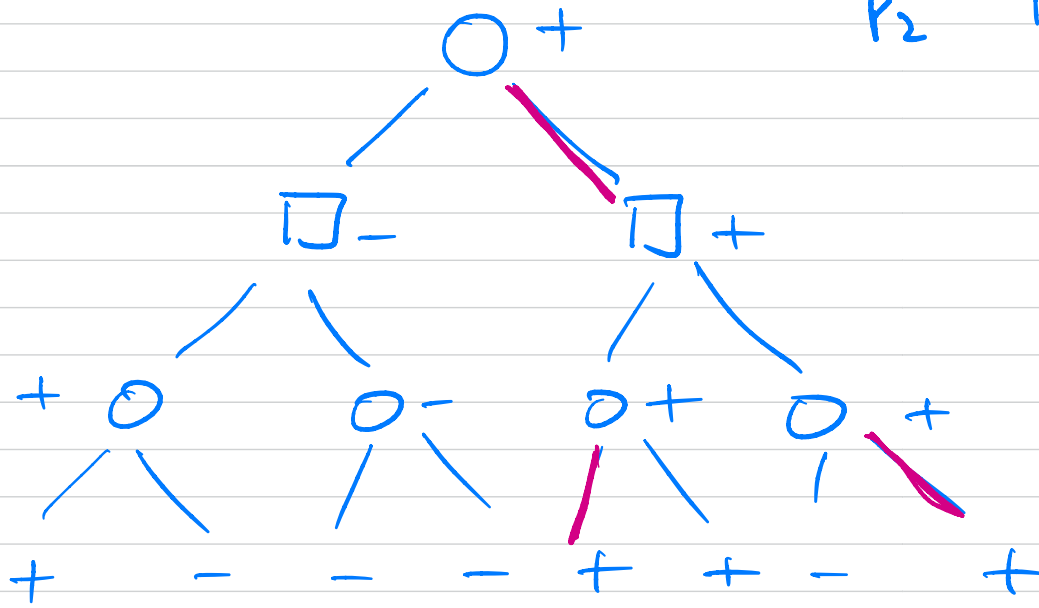
Arbre de jeu ( $\text{fini}$ )



feuilles    + / -

+ : gagné par  $P_1$   
- : gagné par  $P_2$

$P_1$      $\bigcirc$     OR  
 $P_2$      $\square$     AND



—  
 strat. +  
 pour  $P_1$

—  
 strat.  
 Geymante  
 pour  $P_2$

② Nim  $p$  tas de jetons, avec  
 $n_1, \dots, n_p$  jetons

Coup: choisir un tas et enlever  
 $\geq 1$  jeton de ce tas

le joueur qui prend le dernier  
jeton gagne. ( $P_1$  commence)

XOR situation:

$$6 \text{ XOR } 3 = 110 \text{ XOR } 011 = 101$$

Th (Bouton, 1902)

$\alpha = (n_1, \dots, n_p)$  est gagnante pour le  
joueur qui commence

$$\Leftrightarrow n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p \neq 0$$

$$\|(u_1, \dots, u_p)\| := \sum_{i=1}^p u_i$$

Preuve par induction sur  $\|x\|$  :

1)  $u_1 = \dots = u_p = 0$  -- perdant par  $P_K$

2)  $\|x\| > 0$

$$x = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_p)$$

$x$  est + pour  $P_K \Leftrightarrow u_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } u_p \neq 0$

2a) Supposons  $\underbrace{u_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } u_p}_{a} \neq 0$

On cherche  $i$  et  $m_i < u_i$  tq  
 $u_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } m_i \dots \text{ XOR } u_p = 0$

Soit  $r$  le bit le plus fort de  $a$  égal à 1. Donc il ex.  
 $1 \leq i \leq p$  tq. le même bit de  $u_i$   
 est 1.



$$\begin{aligned} m_i &:= \\ \rightarrow n_i \text{ XOR } a &< n_i \end{aligned}$$

Dans ce cas :  $P_k$  réduit le  
ième tas à  $m_i$

$$n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } \underbrace{(m_i)}_{n_i \text{ XOR } a} \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p =$$

$$a \text{ XOR } a = 0$$

$\rightarrow (n_1, \dots, m_i, \dots, n_p)$  perdant  
pour  $P_{3-k}$

2b) supposons que  $n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p = 0$

On veut montrer que c'est perdant  
pour  $P_k$ , donc gagnant pour  $P_{3-k}$   
Donc  $P_{3-k}$  gagne après tous les  
coups possibles de  $P_k$

$$\alpha = (n_1, \dots, n_p), \alpha' = (n_1, \dots, m_i, \dots, n_p)$$

$$\text{Soit } b = n_1 \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_{i-1} \text{ XOR } n_{i+1} \text{ XOR } \dots \text{ XOR } n_p$$

$$b \text{ XOR } n_i = 0 \Rightarrow b \text{ XOR } m_i \neq 0$$

$\forall m_i < n_i$