


Hex + non-detached



Jeux impartiels (ex : Nim)

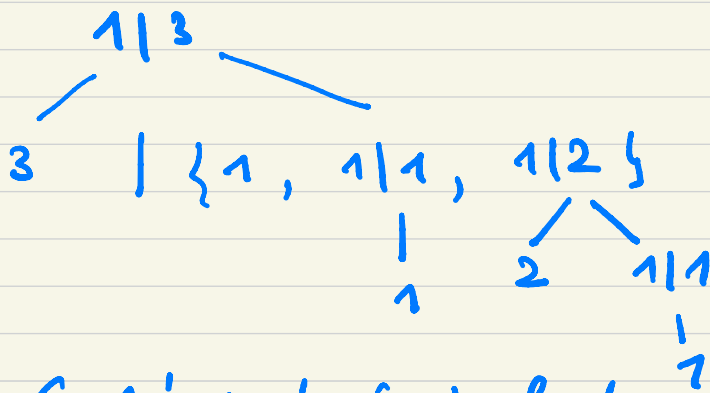
- 2 joueurs turn-based (P_1, P_2)
- parties finies
- impartial : les coups des 2 joueurs sont les mêmes
- le joueur qui est bloqué perd

"Nim-like games":

définition inductive

- $\{\}$ est un jeu (P_1 perd)
- G_1, \dots, G_n jeux \rightarrow
 $G = \{G_1, \dots, G_n\}$ jeu
 P_1 choisit i et joue G_i
- G, H jeux \rightarrow composition $G \parallel H$
A chaque coup, celui qui joue choisit soit de jouer dans G ou dans H .

Ex Nbr $n_1 = 1, n_2 = 3$



Def G, G' sont équivalents ¹ ($G \approx G'$)

si $\forall H$: $G|H$ et $G'|H$ ont le même gain.

En particulier, G et G' ont le même gain ($H = \{\}$).

Rq

- \approx est une rel. d'équivalence
- $G|G \approx G$
- Supposons que P_i perd dans G :
 $G|H \approx H$.
- Si P_i perd dans $G|G'$ alors
 $G \approx G'$.

Thm de Sprague - Grundy

Tout jeu "Nim-like" est équv.
à un jeu de Nim avec un seul
tas (entier positif):

$$\forall G \exists n_G \text{ tq. } G \approx n_G$$

Par induction structurale sur G :

- $G = \{\}$ $n_G = 0$ (P_1 perd)
- $G = G_1 \mid G_2$

On suppose que $G_i \approx n_{G_i}$.

$$\begin{aligned} G_1 \mid G_2 &\approx n_{G_1} \mid G_2 \approx n_{G_1} \mid n_{G_2} \\ &\approx n_{G_1} \text{ xor } n_{G_2} =: n_G \end{aligned}$$

- $G = \{G_1, \dots, G_K\}$

On suppose que $G_i \approx n_i$, $\forall i$.

Def $n_G := \min \{n : n \notin \{n_1, \dots, n_K\}\}$
et on montre: $G \approx n_G$

On doit montrer $\forall H$:

$G \mid H$ et $n_G \mid H$ ont le même gagnant

$$\{G_1, \dots, G_k\} = G$$

1. Si P_i joue un coup dans H , alors c'est le même coup par $G \mid H$ et $n_G \mid H$

2. Si P_i choisit G_j et va dans $G_j \mid H$:

a) soit $n_j < n_G$ et P_i joue $n_G \mid H \rightarrow n_j' \mid H$.

Par (1*i*) : $G_j \mid H$ et $n_j \mid H$ ont le même gagnant.

! Par déf. de n_G : $\forall n < n_G$
 $\exists j$ tq. $n = n_j$.

b) si $n_G < n_j$:

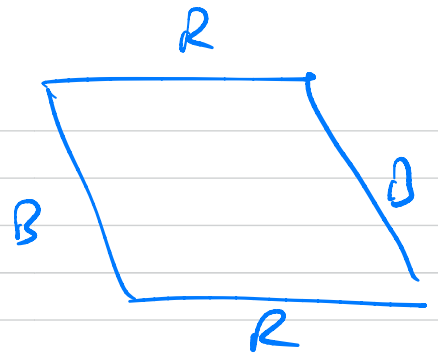
P_i joue $n_G | H \rightarrow n_j | H$ en
rajoutant des jetons dans le jeu de
Nim.

Rq. le jeu de Nim où on peut ajouter
des jetons (tant en restant positif)
a le même gagnant que le jeu
de Nim habituel.

Justif : l'adversaire n'a pas
plus de pouvoir, car on peut
tjrs. "défaire" un incrément

Par (A_i) : $G_j | H \approx n_j | H$. \square

HEX



2 joueurs, R et B

- R pose des jetons rouges, B pose des jetons bleus

R et B s'alternent

- R gagne si elle forme une ligne rouge N-S
- B gagne si il forme une ligne bleue O-E

HEX est un jeu fini.

- 1) On va montrer que HEX n'a pas de partie indéfinie, donc on va conclure que HEX est déterminé.
- 2) On montre que le joueur qui commence (dans R) gagne.

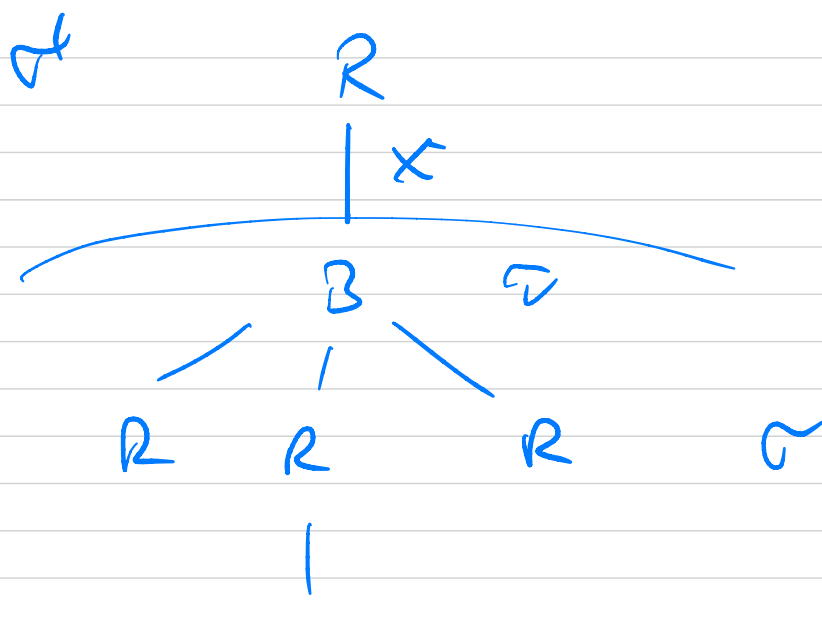
On montre par l'absurde + vol de stratégie que R gagne.

[Supposons que B a une stratégie gagnante σ .

- R commence par un coup arbitraire, qu'on marque par X.
- B joue le premier coup
- R continue avec σ

Si σ lui dit de poser le jeton sur X, alors R choisit une autre position libre quelconque, met un jeton, et le marque par X.

Rq. A chaque instant, tous les jetons rouges, sauf X, sont conformes à la stratégie σ .



On appelle cette stratégie de R

σ^1

Supposons par l'absurde que σ^1 n'est pas gagnante. Comme le jeu est déterminé (1), B a une stratégie gagnante, disons τ .

Le jeton X rend la tâche de B plus difficile.

Sans le jeton X sur le plateau, la stratégie τ serait toujours gagnante.

Donc, le 2ème joueur (R) qui joue σ , ne gagne pas \rightarrow contradiction

Montrons (1).

Supposons que le tableau est rempli de jetons. Alors on montre que soit il y a une ligne rouge $N-S$ ou une ligne bleue $O-E$.

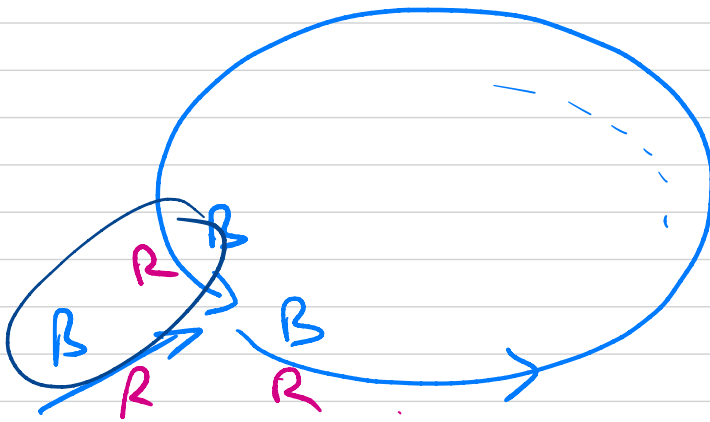
On montre par l'algorithme suivant:

- On commence dans le coin $S-O$.
- On se promène au long des arêtes des hexagones, en respectant l'invariant suivant:
 - la couleur à droite de l'arête doit être R
 - la ... à gauche ...
... B



On veut montrer qu'avec ce parcours on ne forme pas de cycle. Donc, on arrive soit à N (R gauche) ou à E (B gauche)

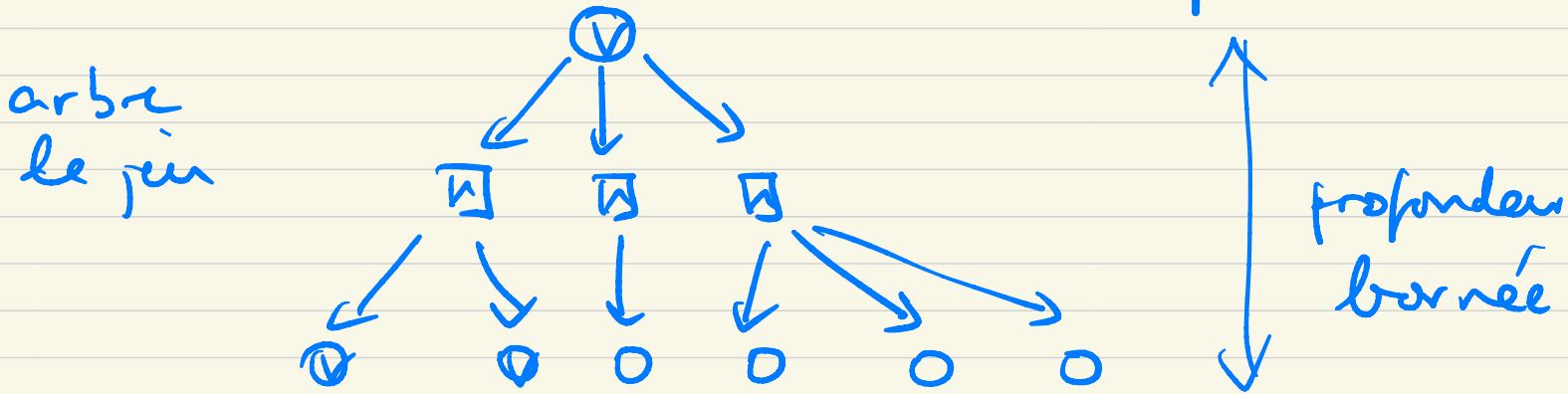
Pourquoi pas de cycle ?



contradiction

Jeux déterminés

Jeux finitaires : nb. fixé de coups



Les jeux finitaires sont déterminés.

P_0 : \bigvee
 \exists

P_1 : \bigwedge
 \forall

P_0 gagne si $\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \forall d_2 \dots$

c_i : coups de P_0
 d_i : " " P_1

(c_1, d_1, \dots) gagnant pour P_0

$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots)$

$= \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2 \dots$

(c_1, d_1, \dots) gagnant pour P_1

Rq. Pour les jeux infinitaires,
cet argument "à la de Morgan"
ne marche plus :

$$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots) \neq \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2$$

Exemple : jeu de Choquet

P_0, P_1 jouent, en alternance, des
intervalles ouverts de \mathbb{R} :

$$\mathbb{R} \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

P_0 commence par $I_0 = (0, 1)$

P_0 gagne si $\bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$

Rq P_0 peut gagner, mais ce n'est
pas évident comment.

Supposons que P_0 choisit I_0 .

I_1 l'intervalle choisi par P_1 avant (parce que c'est le plus grand). Alors P_0 perd:

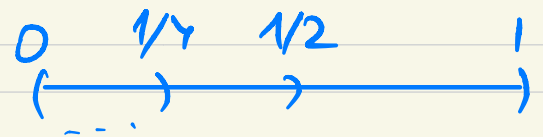
$$P_0 : (0, 1)$$

$$P_1 : (0, 1/2)$$

$$P_0 : (0, 1/2)$$

$$P_1 : (0, 1/4)$$

\vdots



$$\bigcap_{n \geq 0} (0, \frac{1}{2^n}) = \emptyset$$

Mais P_0 peut gagner ce jeu !

La stratégie de P_0 est de choisir $I_n = (a_n, b_n)$ tq.

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

$$a \leq b$$

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$$

Ex

Un jeu infuitaire qui n'est pas
déterminé : on utilisera
l'axiome du choix

On cherche un "XOR infini", qui
sera une fonction $f: \{0,1\}^{\omega} \rightarrow \{0,1\}$
 \uparrow
suites binaires
infinies

avec la propriété :

$\boxed{\text{si } w, w' \in \{0,1\}^{\omega} \text{ diffèrent seulement à une position, alors } f(w) \neq f(w')}$

|| L'axiome du choix nous dit qu'une
telle fonction f existe.

dém Considérons la relation d'équiv.
suivante sur $\{0,1\}^{\omega}$:

$w \sim w'$ si w, w' diffèrent sur un
nombre fini de positions

Soit $S \subseteq \{0,1\}^{\omega}$ un ensemble de représentants, un pour chaque classe d'équivalence (\rightarrow axiome du choix)

Pour $w \in \{0,1\}^{\omega}$ on écrit

$r(w) \in S$ le représentant de la classe de w ($\{w' : w' \sim w\}$)

On déf.

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ et } r(w) \\ & \text{diffèrent sur nb.} \\ & \text{pair de positions} \\ 0 & \text{sinon (impair)} \end{cases}$$

Rq si w, w' diffèrent sur une position exactement $\Rightarrow w \sim w'$,
et $f(w) \neq f(w')$
 $r(w) = r(w') = r$

Avec f on déf. le jeu suivant :

P_0, P_1 jouent en alternance,
chaque comp correspond à un
mot de $\{0,1\}^*$

P_0 joue u_i , P_1 joue v_i

Partie : $\alpha = u_0 v_0 u_1 v_1 \dots \in \{0,1\}^\omega$

P_0 gagne la partie si $f(\alpha) = 1$

Ce jeu n'est pas déterminé.

On montre ça par contradiction,
en supposant que P_1 a une
stratégie gagnante Γ_1 (l'autre
cas est symétrique).

On montre qu'on peut construire
une partie gagnée par P_0

(\rightarrow contradiction au fait que Γ_1 est
gagnante pour P_1)

Si P_0 commence par $u_0 = 0$
 alors soit $v_0 = \sigma_1(0)$ la
 réponse de P_1 . $0 \text{ } v_0 \text{ } u_1 \dots$

Pour maintenant

$$u'_0 = 1 \text{ } v_0 \quad (P_0 \text{ joue})$$

$$\underbrace{1 \text{ } v_0}_{u'_0} \quad v'_0 \quad u'_1$$

$P_0 \quad P_1 \quad P_0 \text{ joue } \sigma_1$

P_0 joue σ_0 :

- premier coup : $1 \text{ } v_0$
- à partir du 2ème coup : σ_1

Pour le mot $\alpha' = (1 \text{ } v_0) \overset{P_1}{(v_0)} (u'_1) \dots$

on a le parti $\alpha = (0) \underset{P_1}{(v_0)} (v'_0) \underset{P_1}{(u'_1)}$

où P_1 joue σ_1 , donc

α est gagné par $P_1 \rightarrow f(\alpha) = 0$

α' est gagné par $P_0 : f(\alpha') = 1$