

Hex + non-determin

---

---

---

---

---



## Jeu impartial (ex : Nim)

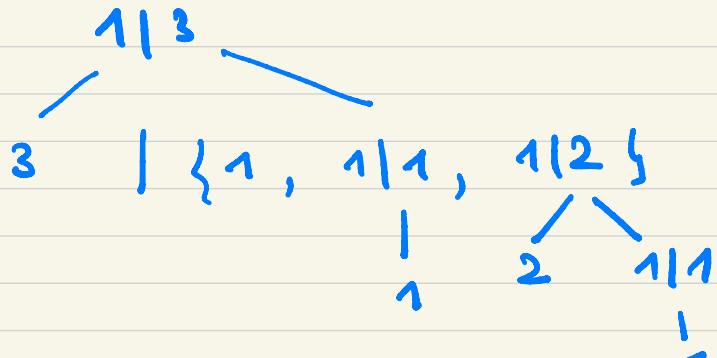
- 2 joueurs turn-based ( $P_1, P_2$ )
- parties finies
- impartial : les coups des 2 joueurs sont les mêmes
- le joueur qui est bloqué perd

"Nim-like games" :

définition inductive

- {} est un jeu ( $P_1$  perd)
- $G_1, \dots, G_n$  jeux  $\rightarrow$   
 $G = \{G_1, \dots, G_n\}$  jeu  
 $P_1$  choisit  $i$  et joue  $G_i$
- $G, H$  jeux  $\rightarrow$  composition  $G \parallel H$   
A chaque coup, celui qui joue choisit soit de jouer dans  $G$  ou dans  $H$ .

Ex Ndm  $n_1 = 1, n_2 = 3$



Def  $G, G'$  sont équivalents  $\Leftrightarrow (G \approx G')$

si  $\forall H : G|H$  et  $G'|H$  ont le même segment.

En particulier,  $G$  et  $G'$  ont le même segment ( $H = \{\}$ ).

Rq

- $\approx$  est une rel. d'équivalence
- $G|G \approx G$
- Supposons que  $\pi_i$  perd dans  $G$ :  
 $G|H \approx H$ .
- Si  $\pi_i$  perd dans  $G|G'$  alors  
 $G \approx G'$ .

## Theorem de Sprague - Grundy

Tout jeu "Nim-like" est équivalent à un jeu de Nim avec un seul tas (entier positif) :

•  $G \ni n \in \mathbb{N}$ .  $G \approx n$

$$\forall G \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq. } G \approx n$$

Par induction structurale sur  $G$ :

- $G = \emptyset \quad n_G = 0 \quad (\text{P1 fond})$

- $G = G_1 \sqcup G_2$

On suppose que  $G_i \approx n_{G_i}$ .

$$G_1 \sqcup G_2 \approx n_{G_1} \sqcup G_2 \approx n_{G_1} \sqcup n_{G_2}$$

$$\approx n_{G_1} + n_{G_2} =: n_G$$

- $G = \{G_1, \dots, G_K\}$

On suppose que  $G_i \approx n_i, \forall i$

Def  $n_G := \min \{n : n \notin \{n_1, \dots, n_K\}\}$   
et on montre:  $G \approx n_G$

Où donc montrer  $\forall H$  :

$G|H$  et  $nG|H$  ont le même gagnant

$$\{G_1, \dots, G_K\} = G$$

1. Si  $P_i$  joue un coup dans  $H$ , alors c'est le même coup par  $G|H$  et  $nG|H$ .

2. Si  $P_i$  choisit  $G_j$  et va dans  $G_j|H$ :

a) soit  $n_j < n_G$  et  $P_i$  joue  $n_G|H \rightarrow n_j|H$ .

Par (Iti):  $G_j|H$  et  $n_j|H$  ont le même gagnant.

! Par déf de  $n_G$ :  $\forall n < n_G$   
 $\exists j$  tq.  $n = n_j$ .

b) si  $n_G < n_j$  :

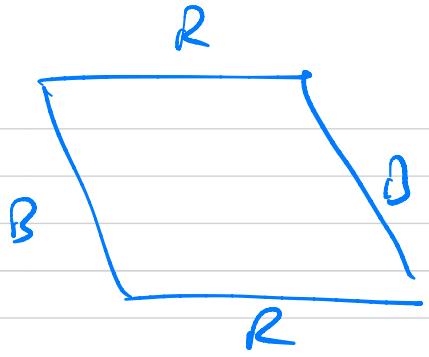
Pi joue  $n_G / H \rightarrow n_j / H$  en  
rajoutant des jetons dans le jeu de  
Nim.

Rq. Le jeu de Nim où on peut ajouter  
des jetons (tout en restant aycigie)  
a le même gagnant que le jeu  
de Nim habituel.

Justif : l'adversaire n'a pas  
plus de pouvoir, car on peut  
tjrs. "défaire" un incément.

Par (f<sub>i</sub>) :  $G_j / H \approx n_j / H$ . ☐

HEX



2 joueurs, R et B

- R pose des jetons rouges, B pose des jetons bleus
- R gagne si elle forme une ligne rouge N-S
- B gagne si R forme une ligne bleue O-E

HEX est un jeu fini.

- 1) On va montrer que HEX n'a pas de parti indecide, donc on va conclure que HEX est déterminé.
- 2) On montre que le joueur qui commence (dans R) gagne.

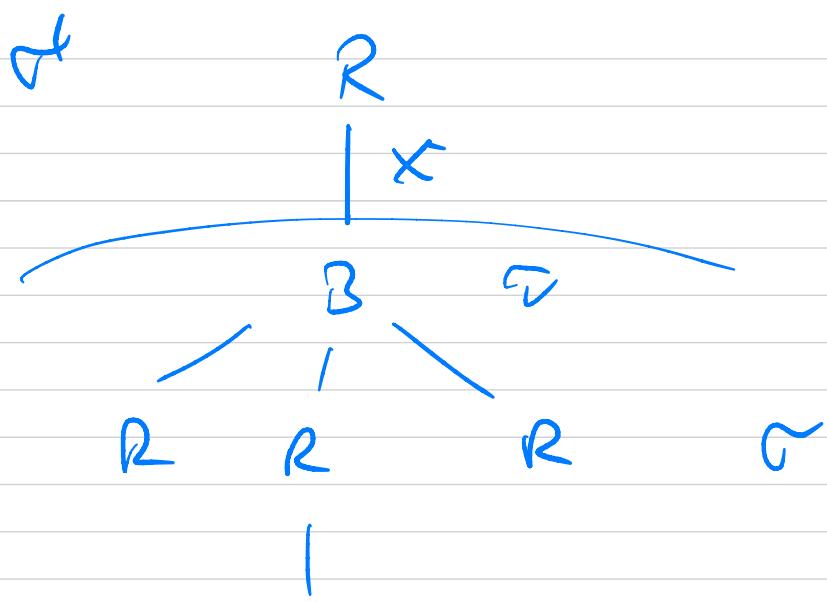
On montre par l'absurde + vol de stratégie que R gagne.

[ Supposons que B a une stratégie gagnante  $\sigma$ .

- R commence par un coup arbitraire, qu'on marque par X.
- B joue le premier coup
- R continue avec  $\sigma$

Si  $\sigma$  lui dit de poser le jeton sur X, alors R choisit une autre position libre quelconque, met un jeton, et la marque par X.

Rq. A chaque instant, tous les jetons muges, sauf X, sont conformes à la stratégie  $\sigma$ .



On appelle cette  
stratégie de R



Supposons par l'absurde que  $\tilde{\tau}$  n'est pas gagnante. Comme le jeu est déterminé (1), B a une stratégie gagnante, dans  $\tilde{\tau}$ .

Le jeton X rend la tâche de B plus difficile.

Sans le jeton X sur le tablier, la stratégie  $\tilde{\tau}$  serait toujours gagnante.

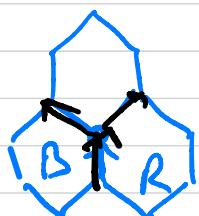
Donc, le 2ème joueur (R) qui joue  $\tilde{\tau}$ , ne gagne pas  $\rightarrow$  contradiction

## Théorème (1) .

Supposons que le fablier est rempli de jetons. Alors on montre que soit il y a une ligne rouge N-S ou une ligne bleue O-E.

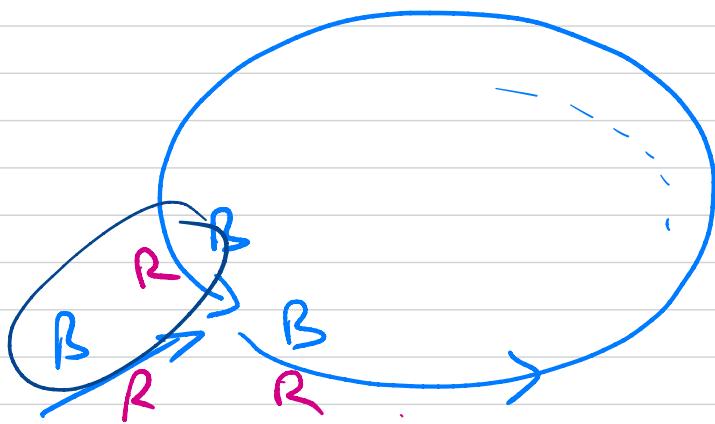
On montre par l'algorithme suivant :

- On commence dans le coin S-O.
- On se promène au long des arêtes des hexagones, en respectant l'invariant suivant :
  - la couleur à droite de l'arête doit être R
  - la .. à gauche .. -
  - ..
  - B



On veut montrer qu'avec ce parcours on ne forme pas de cycle. Donc, on arrive soit à N (R gagné) ou à E (B gagné)

Pourquoi pas de cycle ?

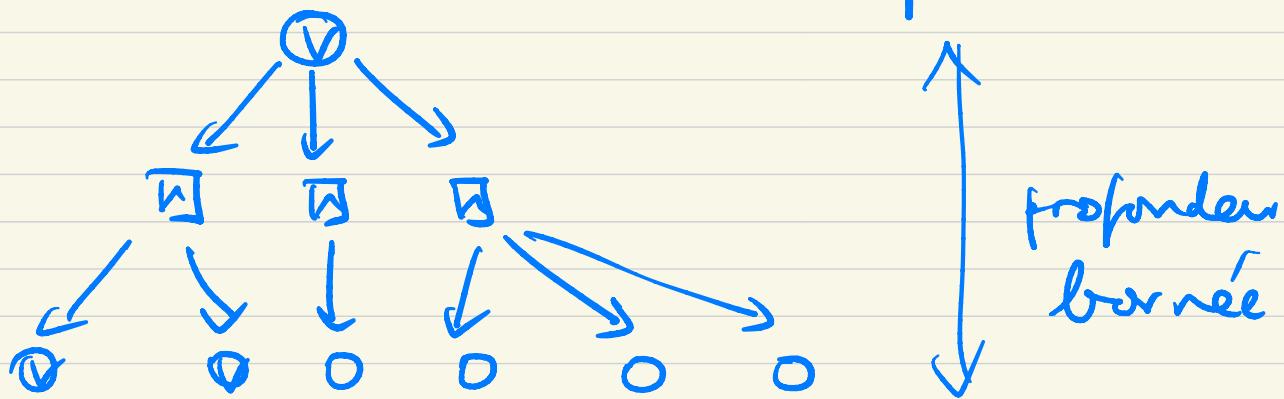


contradiction

## Jeux déterminés

Jeux finis : nb. fixé de coups

arbre  
de jeu



Les jeux finis sont déterminés.

$$P_0 : \begin{array}{c} V \\ \diagdown \\ \exists \end{array}$$

$$P_1 : \begin{array}{c} \wedge \\ \diagup \\ \forall \end{array}$$

$P_0$  gagne si  $\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \forall d_2 \dots$

$c_i$  : coups de  $P_0$        $(c_1, d_1, \dots)$  gagnent pour  $P_0$   
 $d_i$  :        "                   $P_1$

$$\neg (\exists c_1 \forall d_1 \exists c_2 \dots)$$

$$= \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2 \dots$$

$(c_1, d_1, \dots)$  gagnent pour  $P_1$

Rq. Pour les jeux infinitaires,  
 cet argument "à la de Morgan"  
 ne marche plus :

$$\exists (\exists c_1 \vee d_1, \exists c_2 \dots) \neq \\ \forall c_1 \exists d_1 \forall c_2 \exists d_2$$

Exemple : jeu de Choquet

$P_0, P_1$  jouent, en alternance, des  
intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{R} \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$$

$P_0$  commence par  $I_0 = (0, 1)$

$P_0$  gagne si  $\bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$

Rq  $P_0$  peut gagner, mais on n'est  
pas évident comment.

Supposons que  $P_0$  choisit tjs l'intervalle choisi par  $P_1$  avant (parce que c'est le plus grand). Alors  $P_0$  perd.

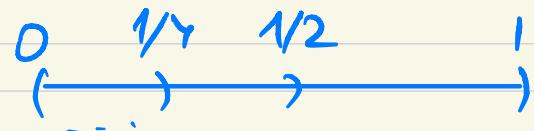
$$P_0 : (0, 1)$$

$$P_1 : (0, 1/2)$$

$$P_0 : (0, 1/2)$$

$$P_1 : (0, 1/4)$$

⋮



$$\bigcap_{n \geq 0} (0, \frac{1}{2^n}) = \emptyset$$

Mais  $P_0$  peut gagner ce jeu !

La stratégie de  $P_0$  est de choisir  $I_n = (a_n, b_n)$  tq.

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad a \leq b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad [a, b] \subseteq \bigcap_{n \geq 0} I_n \neq \emptyset$$

Ex

Un jeu infinitaire qui n'est pas déterminé : on utilisera l'axiome du choix

On cherche un "XOR infini", qui sera une fonction  $f: \{0,1\}^\omega \rightarrow \{0,1\}$

↑  
suites binaires  
infinies

avec la propriété :

si  $w, w' \in \{0,1\}^\omega$  diffèrent seulement à une position, alors  $f(w) \neq f(w')$

|| L'axiome du choix nous dit qu'une telle fonction  $f$  existe.

dém Considérons la relation d'égalité suivante sur  $\{0,1\}^\omega$  :

$w \sim w'$  si  $w, w'$  diffèrent sur un nombre fini de positions

Soit  $S \subseteq \{0,1\}^\omega$  un ensemble de représentants, un pour chaque classe d'équivalence ( $\rightarrow$  axiome du choix)

Pour  $w \in \{0,1\}^\omega$  on écrit

$r(w) \in S$  le représentant de la classe de  $w$  ( $\{w' : w' \sim w\}$ )

On déf.

$$f(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \text{ et } r(w) \\ & \text{diffèrent sur une} \\ & \underline{\text{paire}} \text{ de positions} \\ 0 & \text{sinon} \quad (\text{impair}) \end{cases}$$

Rq si  $w, w'$  diffèrent sur une position exactement  $\Rightarrow w \sim w'$ , et  $f(w) \neq f(w')$   
 $r(w) = r(w') = r$

Avec  $f$  on déf. le jeu suivant :

$P_0, P_1$  jouent en alternance,  
chaque coup correspond à un  
mot de  $\{0,1\}^*$

$P_0$  joue  $u_i$ ,  $P_1$  joue  $v_i$

Partie :  $\alpha = u_0 v_0 u_1 v_1 \dots \in \{0,1\}^\omega$

$P_0$  gagne la partie si  $f(\alpha) = 1$

Ce jeu n'est pas déterminé.

On montre ça par contradiction,  
en supposant que  $P_1$  a une  
stratégie gagnante  $\underline{r_1}$  (l'autre  
cas est symétrique).

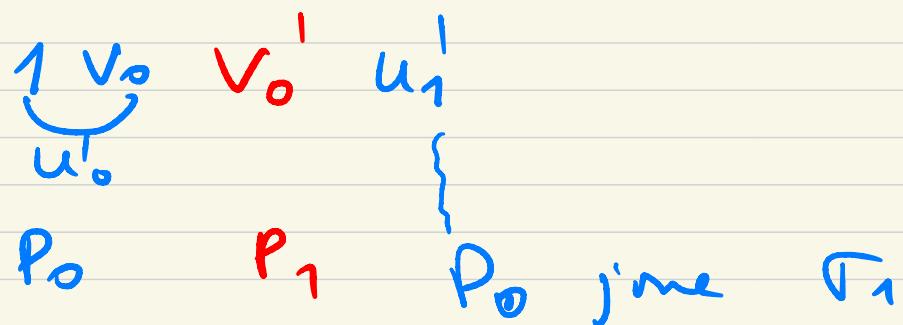
On montre qu'on peut construire  
une partie gagnée par  $P_0$

( $\rightarrow$  contradiction au fait que  $r_1$  est  
gagnante pour  $P_1$ )

Si  $P_0$  commence par  $u_0 = 0$   
 alors soit  $v_0 = \sigma_1(0)$  la  
 réponse de  $P_1$ .  
 $0 v_0 u_1 \dots$

Posons maintenant

$$u'_0 = 1 v_0 \quad (\text{P}_0 \text{ jone})$$



$P_0$  jone  $\sigma_0$ :

- premier comp :  $1 v_0$
- à partir du 2ème comp :  $\sigma_1$

Pour le mot  $\alpha' = (1 v_0) (v_0') (u_1') \dots$  :

on a le mot  $\alpha = (0) (v_0) (v_0') (u_1')$

où  $P_1$  jone  $\sigma_1$ , donc

$\alpha$  est généré par  $P_1$ .  $\rightarrow f(\alpha) = 0$

$\alpha'$  est généré par  $P_0$  :  $f(\alpha') = 1$