

Examen IF222 "Introduction à la théorie des jeux".

22 mai 2017

Responsables : A. Muscholl, H. Gimbert

Documents : notes de cours.

1. Jeux de Gale-Stewart Soit Σ un alphabet fini. Deux joueurs P_0 et P_1 jouent le jeu suivant :

1. Les configurations du jeu sont des mots de Σ^* . La configuration initiale est le mot vide ϵ .
2. Si la configuration actuelle est un mot de longueur paire, c'est le tour de P_0 de jouer, sinon c'est P_1 .
3. Si P_i joue dans la configuration w , il/elle choisit une lettre $a \in \Sigma$. La configuration suivante est le mot wa .

Toute partie maximale est donc un mot infini $z : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$. L'ensemble des mots infinis est noté Σ^ω .

Déterminer le gagnant pour chacune des conditions de victoire $\text{Win}_0 \subseteq \Sigma^\omega$ de P_0 qui suivent, ainsi qu'une stratégie gagnante. L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$:

1. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui ne contiennent pas le facteur aa .
2. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent comme facteur aa ou bb .
3. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent aa et bb comme facteurs (peu importe l'ordre).
4. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent a infiniment souvent si et seulement s'ils contiennent b infiniment souvent.
5. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent a infiniment souvent si et seulement s'ils contiennent b finiment souvent.

Pour la dernière question on suppose que $L \subseteq \Sigma^*$ est un langage régulier, décrit par un automate fini déterministe \mathcal{A} avec tous les états acceptants. La condition Win_0 de victoire de P_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω dont *tous* les préfixes appartiennent à L .

6. Proposez un algorithme qui détermine le gagnant du jeu précédent.

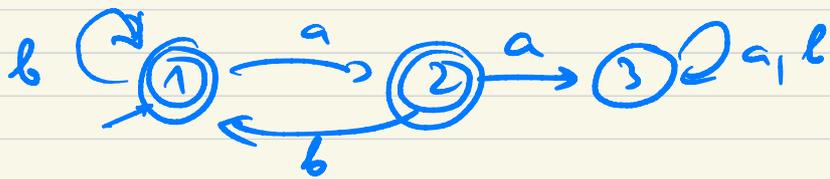
2. Jeux de graphes Sur une arène de jeu finie $\mathcal{A} = (V_0 \dot{\cup} V_1, E)$, où tout sommet a au moins un successeur, on définit une condition Win_0 de victoire pour P_0 par rapport à deux ensembles $F, B \subseteq V$:

$v_0 v_1 \dots \in \text{Win}_0$ si et seulement si il existe $i \geq 0$ tel que : $v_i \in F$ et $v_k \notin B$ pour tout $k > i$.

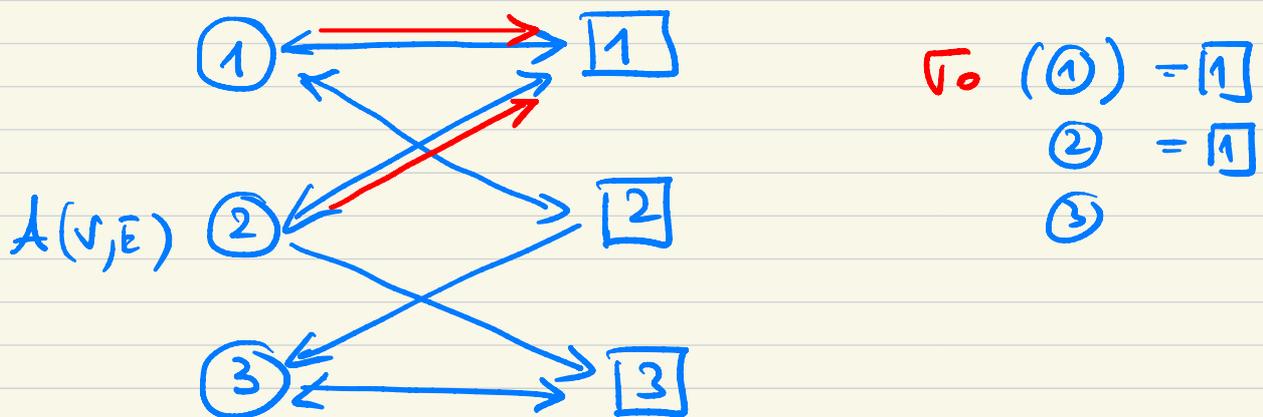
Proposez un algorithme pour calculer les régions gagnantes du jeu ci-dessus, ainsi qu'une stratégie gagnante pour P_0 .

$v_0 \dots v_i v_{i+1} \dots$
F B

Pas de facteur aa :



Arène du jeu :



v_0

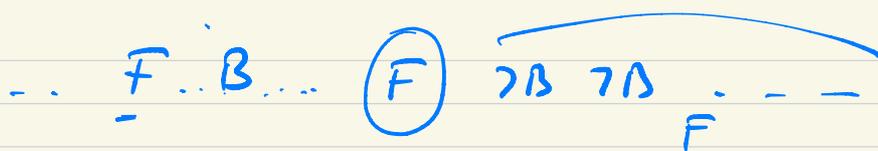
v_1

Quel jeu pour P_0 sur $A(V, E)$?

Eviter $\{(3), [3]\}$ → sûreté pour P_0
(acc. pour P_1)

P_0 gagne $GS(A) \Leftrightarrow$

P_0 gagne le jeu de sûreté à partir de ①



- $\underline{\text{Attr}_0(F \setminus \text{Attr}_1(B))} \subseteq W_0$

P_0 joue strat. d'attr. pour arriver dans $F \setminus \text{Attr}_1(B)$

Dès qu'elle arrive dans $F \setminus \text{Attr}_1(B)$
 elle commence à jouer la strat. d'éviter
 $B \Rightarrow$ gagnant pour P_0

! Il faut pas oublier de montrer

- $\underline{\text{Attr}_0(F \setminus \text{Attr}_1(B))} \subseteq W_1$

P_1 joue la strat. d'éviter $F \setminus \text{Attr}_1(B)$

Si en jouant cette stratégie, la partie
 ne visite pas $F \rightarrow$ gagnant pour P_1

Si la partie arrive dans $v \in F \Rightarrow$

$v \notin F \setminus \text{Attr}_1(B) \Rightarrow v \in \text{Attr}_1(B)$

Maintenant, P_1 commence à jouer
 la strat. d'attr. vers $B \rightarrow$ gagn. pour P_1

