

# Examen IF222 “Introduction à la théorie des jeux”.

22 mai 2017

Responsables : A. Muscholl, H. Gimbert

*Documents : notes de cours.*

**1. Jeux de Gale-Stewart** Soit  $\Sigma$  un alphabet fini. Deux joueurs  $P_0$  et  $P_1$  jouent le jeu suivant :

1. Les configurations du jeu sont des mots de  $\Sigma^*$ . La configuration initiale est le mot vide  $\epsilon$ .
2. Si la configuration actuelle est un mot de longueur paire, c'est le tour de  $P_0$  de jouer, sinon c'est  $P_1$ .
3. Si  $P_i$  joue dans la configuration  $w$ , il/elle choisit une lettre  $a \in \Sigma$ . La configuration suivante est le mot  $wa$ .

Toute partie maximale est donc un mot infini  $z : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ . L'ensemble des mots infinis est noté  $\Sigma^\omega$ .

Déterminer le gagnant pour chacune des conditions de victoire  $\text{Win}_0 \subseteq \Sigma^\omega$  de  $P_0$  qui suivent, ainsi qu'une stratégie gagnante. L'alphabet est  $\Sigma = \{a, b\}$  :

1.  $\text{Win}_0$  est l'ensemble des mots de  $\Sigma^\omega$  qui ne contiennent pas le facteur  $aa$ .
2.  $\text{Win}_0$  est l'ensemble des mots de  $\Sigma^\omega$  qui contiennent comme facteur  $aa$  ou  $bb$ .
3.  $\text{Win}_0$  est l'ensemble des mots de  $\Sigma^\omega$  qui contiennent  $aa$  et  $bb$  comme facteurs (peu importe l'ordre).
4.  $\text{Win}_0$  est l'ensemble des mots de  $\Sigma^\omega$  qui contiennent  $a$  infiniment souvent si et seulement s'ils contiennent  $b$  infiniment souvent.
5.  $\text{Win}_0$  est l'ensemble des mots de  $\Sigma^\omega$  qui contiennent  $a$  infiniment souvent si et seulement s'ils contiennent  $b$  finiment souvent.

Pour la dernière question on suppose que  $L \subseteq \Sigma^*$  est un langage régulier, décrit par un automate fini déterministe  $\mathcal{A}$  avec tous les états acceptants. La condition  $\text{Win}_0$  de victoire de  $P_0$  est l'ensemble des mots de  $\Sigma^\omega$  dont *tous* les préfixes appartiennent à  $L$ .

6. Proposez un algorithme qui détermine le gagnant du jeu précédent.

**2. Jeux de graphes** Sur une arène de jeu finie  $\mathcal{A} = (V_0 \dot{\cup} V_1, E)$ , où tout sommet a au moins un successeur, on définit une condition  $\text{Win}_0$  de victoire pour  $P_0$  par rapport à deux ensembles  $F, B \subseteq V$  :

$v_0 v_1 \dots \in \text{Win}_0$  si et seulement si il existe  $i \geq 0$  tel que :  $v_i \in F$  et  $v_k \notin B$  pour tout  $k > i$ .

Proposez un algorithme pour calculer les régions gagnantes du jeu ci-dessus, ainsi qu'une stratégie gagnante pour  $P_0$ .

### 3. Jeux sous forme stratégique.

1. Que nous apprend le théorème de von Neumann à propos des jeux sous forme stratégique ?
2. Calculer la valeur du jeu sous forme stratégique suivant.

	$a$	$b$	$c$	$d$
$A$	0	3	0	7
$B$	0	5	-1	3
$C$	5	4	5	6
$D$	0	2	0	7

3. Donner un exemple de jeu sous forme stratégique où le joueur 1 et le joueur 2 ont chacun une unique stratégie optimale pure.
4. Donner un exemple de jeu sous forme stratégique où le joueur 1 et le joueur 2 ont chacun une unique stratégie optimale mixte.
5. Donner un exemple de jeu sous forme stratégique où le joueur 1 et le joueur 2 ont chacun un nombre infini de stratégies optimales.
6. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Donner des conditions suffisantes sur  $f$  pour que si  $(M_{i,j})_{i \in 1 \dots n, j \in 1 \dots m}$  est un jeu sous forme stratégique de valeur  $v$  alors  $(f(M_{i,j}))_{i \in 1 \dots n, j \in 1 \dots m}$  est un jeu sous forme stratégique de valeur  $f(v)$ .
7. Soit  $M$  et  $N$  deux matrices carrées de mêmes tailles à valeurs réelles et  $v$  et  $v'$  les valeurs des jeux sous forme stratégiques associés. Soit  $w$  la valeur du jeu  $M + N$ . Est-il impossible/possible/toujours vrai que  $w = v + v'$  ?