

Examen IF222 “Introduction à la théorie des jeux”.

22 mai 2017

Responsables : A. Muscholl, H. Gimbert

Documents : notes de cours.

1. Jeux de Gale-Stewart Soit Σ un alphabet fini. Deux joueurs P_0 et P_1 jouent le jeu suivant :

1. Les configurations du jeu sont des mots de Σ^* . La configuration initiale est le mot vide ϵ .
2. Si la configuration actuelle est un mot de longueur paire, c'est le tour de P_0 de jouer, sinon c'est P_1 .
3. Si P_i joue dans la configuration w , il/elle choisit une lettre $a \in \Sigma$. La configuration suivante est le mot wa .

Toute partie maximale est donc un mot infini $z : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$. L'ensemble des mots infinis est noté Σ^ω .

Déterminer le gagnant pour chacune des conditions de victoire $\text{Win}_0 \subseteq \Sigma^\omega$ de P_0 qui suivent, ainsi qu'une stratégie gagnante. L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$:

1. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui ne contiennent pas le facteur aa .
2. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent comme facteur aa ou bb .
3. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent aa et bb comme facteurs (peu importe l'ordre).
4. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent a infiniment souvent si et seulement s'ils contiennent b infiniment souvent.
5. Win_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω qui contiennent a infiniment souvent si et seulement s'ils contiennent b finiment souvent.

Pour la dernière question on suppose que $L \subseteq \Sigma^*$ est un langage régulier, décrit par un automate fini déterministe \mathcal{A} avec tous les états acceptants. La condition Win_0 de victoire de P_0 est l'ensemble des mots de Σ^ω dont *tous* les préfixes appartiennent à L .

6. Proposez un algorithme qui détermine le gagnant du jeu précédent.

2. Jeux de graphes Sur une arène de jeu finie $\mathcal{A} = (V_0 \dot{\cup} V_1, E)$, où tout sommet a au moins un successeur, on définit une condition Win_0 de victoire pour P_0 par rapport à deux ensembles $F, B \subseteq V$:

$v_0 v_1 \dots \in \text{Win}_0$ si et seulement si il existe $i \geq 0$ tel que : $v_i \in F$ et $v_k \notin B$ pour tout $k > i$.

Proposez un algorithme pour calculer les régions gagnantes du jeu ci-dessus, ainsi qu'une stratégie gagnante pour P_0 .

3. Jeux sous forme stratégique.

1. Que nous apprend le théorème de von Neumann à propos des jeux sous forme stratégique ?
2. Calculer la valeur du jeu sous forme stratégique suivant.

	a	b	c	d
A	0	3	0	7
B	0	5	-1	3
C	5	4	5	6
D	0	2	0	7

3. Donner un exemple de jeu sous forme stratégique où le joueur 1 et le joueur 2 ont chacun une unique stratégie optimale pure.
4. Donner un exemple de jeu sous forme stratégique où le joueur 1 et le joueur 2 ont chacun une unique stratégie optimale mixte.
5. Donner un exemple de jeu sous forme stratégique où le joueur 1 et le joueur 2 ont chacun un nombre infini de stratégies optimales.
6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Donner des conditions suffisantes sur f pour que si $(M_{i,j})_{i \in 1 \dots n, j \in 1 \dots m}$ est un jeu sous forme stratégique de valeur v alors $(f(M_{i,j}))_{i \in 1 \dots n, j \in 1 \dots m}$ est un jeu sous forme stratégique de valeur $f(v)$.
7. Soit M et N deux matrices carrées de mêmes tailles à valeurs réelles et v et v' les valeurs des jeux sous forme stratégiques associés. Soit w la valeur du jeu $M + N$. Est-il impossible/possible/toujours vrai que $w = v + v'$?