

Master S&T Informatique, Univ. Bordeaux 1

Langages et logiques (logiques comportementales) - devoir maison

# 1 Automates à parité et automates de Büchi

## 1.1 Exemple

1. – Le langage reconnu par  $\mathcal{A}$  est :  $L = b^*a(b^*ab)^*b^\omega$  .

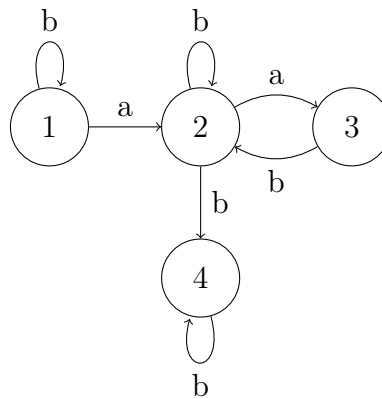
En effet, si  $\omega \in L$  alors comme l'exécution commence dans l'état 1, le premier  $a$  qui apparaît dans  $\omega$  la fait passer dans l'état 2. De là, l'exécution sur  $\omega$  va soit dans 2 soit dans 3 puis reste infiniment dans 2. Donc la couleur répétée infiniment souvent est 2 qui est paire. Ainsi  $\mathcal{A}$  accepte  $\omega$ .

Réciproquement, soit  $\omega$  un mot reconnu par  $\mathcal{A}$ , l'exécution dans  $\mathcal{A}$  de  $\omega$  ne peut rester indéfiniment dans l'état 1 (état initial) car il est associé à une couleur impaire. Ainsi,  $\omega \in b^*a$ . L'exécution ne peut ensuite aller que dans l'état 2 ou 3 ( $\omega \in b^*a(b^*ab)^*$ ) mais ne peut rester indéfiniment dans 3 car 2 est le seul état correspondant à une couleur paire. Finalement  $\omega \in b^*a(b^*ab)^*b^\omega$ .

- Une formule LTL décrivant ce message est :  $\varphi = b \mathcal{U}[a \wedge \mathcal{X}(b \mathcal{U}(a \wedge \mathcal{X}b)) \mathcal{U} \mathcal{G}b]$  .

En effet  $(a \wedge \mathcal{X}b)$  veut dire que si à la position  $i$  on a  $a$  alors à la position  $i+1$  on aura  $b$ .  $(b \mathcal{U}(a \wedge \mathcal{X}b))$  veut dire qu'on n'a que des  $b$  jusqu'à ce qu'on rencontre un  $a$  qui sera nécessairement suivi d'un  $b$ .  $\mathcal{G}b$  veut dire qu'on ne rencontre que des  $b$ . Donc  $(b \mathcal{U}(a \wedge \mathcal{X}b)) \mathcal{U} (\mathcal{G}b)$  décrit le langage  $(b^*ab)^*b^\omega$ . Ainsi,  $a \wedge \mathcal{X}(b \mathcal{U}(a \wedge \mathcal{X}b)) \mathcal{U} \mathcal{G}b$  décrit le langage  $a(b^*ab)^*b^\omega$  et enfin  $b \mathcal{U}[a \wedge \mathcal{X}(b \mathcal{U}(a \wedge \mathcal{X}b)) \mathcal{U} \mathcal{G}b]$  décrit  $b^*a(b^*ab)^*b^\omega$ .

2. Voici un automate de Büchi équivalent où l'état initial est 1 et l'état final est 4 :



Si  $\omega \in b^*a(b^*ab)^*b^\omega$  alors il est accepté par l'automate de Büchi équivalent. En effet, on a vu précédemment que de tels mots restent indéfiniment dans l'état 2 par une transition  $b$ , ainsi il existe une exécution qui ira dans l'état 4 qui est un état acceptant.

Réciproquement, si  $\omega$  est accepté par l'automate de Büchi, une exécution de  $\omega$  sur ce dernier va de l'état initial à un état final, puis reste dans cet état final indéfiniment (cet état ici est 4). Ainsi,  $\omega \in b^*a(b^*ab)^*b.b^\omega$  ce qui correspond bien à  $\omega \in b^*a(b^*ab)b^\omega$ .

## 1.2 Parité et Büchi

- (a) Soit un automate de Büchi  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , on peut le transformer en automate de parité équivalent  $\mathcal{B} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \chi)$  où on définit la fonction de coloriage  $\chi$  :

$$\forall q \in Q, \chi(q) = \begin{cases} 2 & \text{si } q \in F \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un mot  $\omega$  est accepté par  $\mathcal{A}$  si  $\mathcal{A}$  a une exécution  $\rho$  sur  $\omega$  telle que  $\text{Inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$ . Cela est équivalent à une exécution dans  $\mathcal{B}$  telle que  $\text{Inf}(\rho) \cap \{q \in Q \mid \chi(q) = 2\} \neq \emptyset$ . Comme 2 est la couleur maximale, cela est équivalent à  $\mathcal{B}$  a une exécution sur  $\omega$  telle que la couleur maximale répétée infiniment souvent est paire. Ce qui veut dire que  $\omega$  est accepté par  $\mathcal{B}$ .

On a bien préservé l'ensemble des états et la relation de transition.

- (b) Soit  $\mathcal{A}$  un automate de parité avec  $n$  états,  $m$  transitions et des couleurs allant de 0 à  $2k$ . On va construire un automate de Büchi  $\mathcal{B}$  avec  $\mathcal{O}(nk)$  états,  $\mathcal{O}(mk)$  transitions, tel que  $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ .

Soit  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \chi)$  et  $E_i = \{q \in Q \mid \chi(q) > 2i\}$  l'ensemble des états de couleurs supérieures à  $2i$ .  $\forall 0 \leq i \leq k$ ,  $Q_i = (Q \setminus E_i) \times \{i\}$ .

On prend  $\mathcal{B} = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F)$  où  $Q' = Q \cup (\cup_{0 \leq i \leq k} Q_i)$  et  $F = \cup_{0 \leq i \leq k} (\{q \in Q \mid \chi(q) = 2i\}) \times \{i\}$  et

$$\forall q \in Q \text{ et } \forall \sigma \in \Sigma : \begin{cases} \delta'(q, \sigma) = \delta(q, \sigma) \cup (\cup_{0 \leq i \leq k} (\delta(q, \sigma) \setminus E_i) \times \{i\}) \\ \forall 0 \leq i \leq k, \delta'((q, i), \sigma) = (\delta(q, \sigma) \setminus E_i) \times \{i\} \end{cases}$$

$\mathcal{B}$  consiste en  $(k+2)$  copies de  $\mathcal{A}$ . Il y a une première copie complète (copie de l'automate initial). Les autres  $(k+1)$  copies sont partielles. Chacune de ces copies est associée à un indice  $i$  (ses états sont étiquetés  $i$ ) ; elle a pour états tous les états de  $\mathcal{A}$  sauf ceux de couleurs strictement plus grands que  $2i$  (et les transitions qui y sont associés) et a pour états finaux les états de couleurs  $2i$ . De plus, si une transition existe dans l'état initial :  $\delta(p, a) = q$ , on relie  $p$  à toutes les copies :  $\delta(p, a) = (q, i)$ . Une exécution de  $\mathcal{B}$  commence dans la copie initiale. L'exécution peut choisir de façon non déterministe de rester dans la copie initiale ou de bouger vers une des  $(k+1)$  copies. Quand l'exécution de  $\mathcal{B}$  bouge vers une copie associée à l'indice  $i$ , elle ne peut visiter d'états dont la couleur est supérieure à  $2i$  (la copie ne contient pas de tels états). La condition acceptante de  $\mathcal{B}$  garantit qu'une exécution acceptante finira par quitter la copie initiale et ira dans un certain  $Q_i$  où il visitera infiniment souvent plusieurs états dont la couleur maximale est  $2i$ . D'où l'équivalence.

Enfin, on a fait  $\mathcal{O}(k)$  copies ce qui donne bien une taille polynomiale en la taille de l'automate de départ.

## 2 Jeux de parité faible

### 2.1 Transformation en jeu à parties infinies

Peu importe les couleurs rencontrées, si l'un des joueurs est bloqué, il perd. Pour chaque jeu  $G = (\mathcal{A}, \text{Win})$ , on peut construire un sous-jeu  $G' = (\mathcal{A}', \text{Win}')$  équivalent tel que dans  $\mathcal{A}'$  il n'y a pas de sommets puits, ainsi ni  $J_0$  ni  $J_1$  ne seront bloqués, il n'y aura que des parties infinies dans  $G'$ . Un sommet puits  $v$  est tel que :  $\forall w \in V, (v, w) \notin E$ .

Soit  $\mathcal{A} = (V, E)$  où  $V = V_0 \cup V_1$  l'arène initiale. On considère  $U_0 = \{v \in V_0 | v \text{ est un puits}\}$  et  $U_1 = \{v \in V_1 | v \text{ est un puits}\}$ . Soit  $X_0 = \text{Attr}_0(U_1)$  et  $X_1 = \text{Attr}_1(U_0)$ .

On pose :  $\mathcal{A}' = (V', E') = \mathcal{A} \setminus (X_0 \cup X_1)$ .

$\mathcal{A}'$  n'a plus de puits. En effet, supposons que  $\mathcal{A}'$  ait un puits  $v$ , alors  $v$  n'est pas un puits dans  $\mathcal{A}$  car il appartiendrait à  $U_0$  ou  $U_1$  et donc à  $X_0$  ou  $X_1$  et n'appartiendrait alors plus à  $\mathcal{A}'$  ce qui est absurde. Cela veut dire qu'il existe un ensemble de sommets  $S$  qui se trouvent dans  $\mathcal{A}$  mais pas dans  $\mathcal{A}'$  tel que  $\forall s \in S, (v, s) \in E$ . Il s'ensuit que  $S$  est inclus dans  $X_0$  ou  $X_1$  car il est inclus dans  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ . Voici les cas qui se présentent à nous (tous les successeurs de  $v$  sont dans  $S$ ) :

- Si  $v \in V_0$  et  $\exists s \in S$  tel que  $s \in X_0$ , alors  $v \in X_0$  (par définition de l'attracteur de  $J_0$ ). Impossible.
- Si  $v \in V_0$  et  $\forall s \in S$  tel que  $s \in X_1$ , alors  $v \in X_1$  (par définition de l'attracteur de  $J_1$ ). Impossible.
- Si  $v \in V_1$  et  $\exists s \in S$  tel que  $s \in X_1$ , alors  $v \in X_1$  (par définition de l'attracteur de  $J_1$ ). Impossible.
- Si  $v \in V_1$  et  $\forall s \in S$  tel que  $s \in X_0$ , alors  $v \in X_0$  (par définition de l'attracteur de  $J_0$ ). Impossible.

Finalement, on n'a bien aucun puits dans  $\mathcal{A}'$ .

$X_0 = \text{Attr}_0(U_1)$  fait partie de la région gagnante de  $J_0$ . En effet,  $\text{Attr}_0(U_1)$  est l'ensemble des sommets à partir desquels  $J_0$  peut forcer la partie à arriver en un nombre fini de coups en  $U_1$  (par définition), donc à arriver dans un sommets puits appartenant à  $J_1$ , donc à faire perdre  $J_1$ . De même,  $X_1 = \text{Attr}_1(U_0)$  fait partie de la région gagnante de  $J_1$ .

En effet les seuls sommets qui peuvent faire le lien entre  $\mathcal{A}'$  et  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$  sont soit des sommets de  $V_0$  menant à  $X_1$  (région perdante pour  $J_0$ ) soit des sommets de  $V_1$  menant à  $X_0$  (région perdante pour  $J_1$ ), d'après l'énumération des cas vue plus haut. Ainsi une stratégie gagnante pour  $J_0$  (resp.  $J_1$ ) dans  $\mathcal{A}'$  l'est aussi dans  $\mathcal{A}$ .  $\mathcal{A}'$  est un piège pour  $J_0$  et pour  $J_1$  ce qui constitue un sous-jeu pour ces deux joueurs.

Ainsi, les régions gagnantes dans  $\mathcal{A}'$  se traduisent par des régions gagnantes dans  $\mathcal{A}$ . Si les régions gagnantes dans  $\mathcal{A}'$  sont  $W'_0$  pour  $J_0$  et  $W'_1$  pour  $J_1$  alors les régions gagnantes pour  $\mathcal{A}$  sont  $W'_0 \cup X_0$  pour  $J_0$  et  $W'_1 \cup X_1$  pour  $J_1$ .

### 2.2 Exemple

Soit  $\sigma$  la stratégie gagnante de  $J_0$ .

La couleur maximale est impaire (= 3). Les sommets de couleur 3 sont :  $d$ . L'attracteur de  $J_1$  pour  $d$  force à aller dans  $d$  et donc fait que  $J_1$  gagne.  $\text{Attr}_1(\{d\}) = \{b, d\}$ . Donc  $\{b, d\} \subseteq \text{Win}_1$ .

$V' = \{a, c, e, f, g\}$  est un sous-jeu pour  $J_0$  dont la couleur maximale est 2 qui est paire (sur les sommets  $c$  et  $g$ ).  $\text{Attr}_0(\{g, c\})|_{V'} = \{c, f, g\}$ . Donc  $\{c, f, g\} \subseteq \text{Win}_0$  et  $\sigma(f) = g$  et  $\sigma(g) = f$  (on reste dans  $V'$ ),  $c$  ne peut aller que dans  $g$ .

$V'' = \{a, e\}$  est un sous-jeu pour  $J_1$  dont la couleur maximale est 0 qui est paire (sur les sommets  $a$  et  $e$ ).  $J_1$  ne peut gagner ici, donc c'est un piège pour  $J_1$ .  $\text{Attr}_0(\{a, e\})|_{V''} = \{a, e\}$ . Donc  $\{a, e\} \subseteq \text{Win}_0$  et  $\sigma(a) = a$  (on reste dans  $V''$ ).

Finalement,  $\boxed{\text{Win}_0 = \{a, c, e, f, g\}, \sigma(a) = a, \sigma(f) = g, \sigma(g) = f}$

### 2.3 Positions gagnantes et $\mu$ -calcul

On pose :

$$t_0(X) = (p_0 \wedge \Diamond X) \vee (p_1 \wedge \Box X)$$

$$t_1(X) = (p_1 \wedge \Diamond X) \vee (p_0 \wedge \Box X)$$

- Si toutes les couleurs sont 0 ou 1,  $J_0$  gagne si  $J_1$  est bloqué ( $J_0$  peut forcer en un nombre de coups fini  $J_1$  à aller dans un état bloqué) ou si la partie est infinie et uniquement étiquetée de 0 :

$$T_0 = |\nu X_0.(c_0 \wedge t_0(X_0)) \vee \mu Y.t_0(Y)|$$

Soit  $T_{0,0} = |\nu X_0.(c_0 \wedge t_0(X_0))|$  et soit  $v \in T_{0,0}$ .  $v$  est toujours étiqueté 0. Ou bien  $v \in V_1$  et tout successeur de  $v$  est dans  $T_{0,0}$ . Ou bien  $v \in V_0$  et  $v$  a au moins un successeur dans  $T_{0,0}$ . Ceci décrit une partie étiquetée 0 ou  $J_0$  n'est jamais bloqué.  $J_0$  a donc une stratégie positionnelle gagnante  $\sigma_0$  (il suffit de choisir pour tout sommet  $v \in T_{0,0} \cap V_0$  un successeur  $\sigma_0(v) \in T_{0,0}$ ).

Soit  $T_{0,1} = |\mu Y.t_0(Y)| = \cup_{n \geq 0} |t_0^n(\perp)|$  ( $2^{eme}$  théorème de Knaster-Tarski). A tout sommet  $v$  de  $T_{0,1}$ , on associe le plus petit entier  $n_v$  tel que  $v$  est dans  $|t_0^{n_v+1}(\perp)|$ . Ou bien  $v \in V_1$  et tout successeur de  $v$  est dans  $|t_0^{n_v}(\perp)|$ . Ou bien  $v \in V_0$  et  $v$  a au moins un successeur  $\sigma_1(v)$  dans  $|t_0^{n_v}(\perp)|$ . Ainsi  $n_{\sigma_1(v)} \leq n_v - 1$ . Soit  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow \dots$  une partie commençant dans  $T_{0,1}$ , et jouée par  $J_0$  suivant la stratégie  $\sigma_1$ , tous les sommets de la partie restent dans  $T_{0,1}$  et par construction, la suite des entiers  $n_{v_p}$  est strictement décroissante, donc la partie est finie. Comme  $J_0$  n'est jamais bloqué, cela veut dire que c'est  $J_1$  qui est bloqué, la partie est gagnante pour  $J_0$ .

Finalement, depuis tout sommet  $v$  de  $T_0 = T_{0,0} \cup T_{0,1}$ ,  $J_0$  a une stratégie positionnelle gagnante  $\sigma$ ,  $\sigma(v) = \sigma_0(v)$  si  $v$  est dans  $T_{0,0}$ ,  $\sigma(v) = \sigma_1(v)$  sinon.

Le complémentaire  $T_1$  de  $T_0$  peut s'exprimer par le  $\mu$ -terme :  $\mu X_0.(c_1 \vee t_1(X_0)) \wedge \nu Y.t_1(Y)$ . On suit le même raisonnement vu plus haut en posant  $T_{1,0} = |\mu X_0.(c_1 \vee t_1(X_0))| = \cup_{n \geq 0} |t_1^n(\perp)|$  et  $T_{1,1} = |\nu Y.t_1(Y)|$ .

Soit  $v \in T_1$ , cela implique que  $v \in T_{1,0}$ . On lui associe le plus petit entier  $n_v$  tel que  $v$  est dans  $|t_1^{n_v+1}(\perp)|$ . Ou bien  $v \in V_0$  et tout successeur de  $v$  est dans  $|t_1^{n_v}(\perp)|$  ou est de couleur 1. Ou bien  $v \in V_1$  et  $v$  a au moins un successeur  $\sigma(v)$  dans  $|t_1^{n_v}(\perp)|$  ou de couleur 1. Soit  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_p \rightarrow \dots$  une partie commençant dans  $T_1$ , et jouée par  $J_1$  suivant la stratégie  $\sigma_1$ , tous les sommets de la partie restent dans  $T_{0,1}$  et par construction, la suite des entiers  $n_{v_p}$  est strictement décroissante jusqu'à ce qu'elle atteigne 1. Cela veut dire que  $J_1$  force la partie à aller dans 1 en un nombre de coups fini ou à avoir une partie finie.

De plus, le fait qu'on ait aussi  $v \in T_{1,1}$  assure que  $J_1$  ne sera jamais bloqué.

Si la partie atteint 1, elle est gagnante pour  $J_1$  car c'est la couleur maximale et  $J_1$  n'est jamais bloqué. Si la partie est finie, elle est gagnante pour  $J_1$  car il n'est jamais bloqué.  $J_1$  a bien une stratégie positionnelle  $\sigma$  depuis tous les sommets de  $T_1$ .

On en conclut que  $\boxed{Win_0 = T_0}$ .

- On suppose maintenant que les sommets sont de couleurs 0, 1 ou 2.  $J_0$  gagne si  $J_1$  est bloqué ou si la partie est infinie et que la couleur maximale vue est 0 ou 2.

On montre que

$$\begin{aligned} Win_0 = & | \nu X_2. ( [(c_0 \vee c_1 \vee c_2) \wedge t_0(X_2)] \wedge [\mu Y. (c_2 \vee t_0(Y))] ) \\ & \vee \nu X_0. ( [c_0 \wedge t_0(X_0)] \wedge [\mu Y. (c_0 \vee t_0(Y))] ) \\ & \vee \mu Y. (t_0(Y)) | \end{aligned}$$

On pose

$$T_{0,0} = | \nu X_2. ( [(c_0 \vee c_1 \vee c_2) \wedge t_0(X_2)] \wedge [\mu Y. (c_2 \vee t_0(Y))] ) | ,$$

$$T_{0,1} = | \nu X_0. ( [c_0 \wedge t_0(X_0)] \wedge [\mu Y. (c_0 \vee t_0(Y))] ) | ,$$

$$T_{0,2} = | \mu Y. (t_0(Y)) | , T_0 = T_{0,0} \cup T_{0,1} \cup T_{0,2}$$

Comme précédemment, on exhibe trois stratégies  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ , suivant que  $v \in V_0$  soit dans  $T_{0,0}$ , dans  $T_{0,1}$  ou dans  $T_{0,2}$ . La stratégie finale sera positionnelle : pour tout  $v \in T_0$ ,  $v \in T_{0,i}$ , on choisit une stratégie  $\sigma_i$ .

Soit  $v \in T_{0,0}$ . Ou bien  $v \in V_1$  et comme  $v \in \mu Y. (c_2 \vee t_0(Y))$ , cela veut dire que  $J_1$  atteint 2 en un nombre fini d'étapes ou n'a pas de successeurs. De plus que  $v$  soit de couleur 0, 1 ou 2, tous ses successeurs sont dans  $T_{0,0}$  (pgpf). Ou bien  $v \in V_0$  et comme  $v \in \mu Y. (c_2 \vee t_0(Y))$ , cela veut dire que  $J_0$  atteint 2 en un nombre fini d'étapes ou a un successeur dans  $T_{0,0}$ . De plus que  $v$  soit de couleur 0, 1 ou 2, il a au moins un successeur dans  $T_{0,0}$  (pgpf). Par conséquent, soit  $J_1$  est bloqué soit la partie est infinie et le jeu atteint 2.  $J_0$  a une stratégie positionnelle pour  $v \in V_0 \cap T_{0,0}$  qui consiste à choisir un successeur dans  $T_{0,0}$  de façon à atteindre 2 (voir la stratégie de  $J_1$  dans le cas aux couleurs 0 et 1).

On procède de même pour  $T_{0,1}$ , qui mène la partie restreinte aux sommets de couleurs 0, à atteindre 0 ou à bloquer  $J_1$  sans que  $J_0$  ne soit jamais bloqué.

On a vu que  $T_{0,2}$  correspond à l'ensemble des sommets à partir desquels  $J_0$  force  $J_1$  à être bloqué et donc à perdre. La stratégie positionnelle gagnante de  $J_0$  consiste à partir d'un sommet de  $T_{0,2}$  consiste à rester dans  $T_{0,2}$ .

Le complémentaire de  $T_0$  est  $T_1$  tel que :

$$T_{1,0} = | \mu X_2. ( t_1(X_2) \vee \nu Y. ((c_0 \vee c_1) \wedge t_1(Y)) ) | ,$$

$$T_{1,1} = | \mu X_0. ( [(c_1 \vee c_2) \vee t_1(X_0)] \vee [\nu Y. ((c_1 \vee c_2) \wedge t_1(Y))] ) | ,$$

$$T_{1,2} = | \nu Y. (t_1(Y)) | ,$$

$T_1 = T_{1,0} \cap T_{1,1} \cap T_{1,2}$  correspond aux sommets depuis lesquels soit  $J_0$  est bloqué (et  $J_1$  gagne) soit la partie est infinie.

On ne va s'intéresser maintenant qu'aux parties infinies.  $T_{1,1}$  correspond aux sommets depuis lesquels  $J_1$  force à rester dans 1 ou 2 (donc à exclure les cycles de 0).  $T_{1,0}$  correspond aux sommets depuis lesquels  $J_1$  force à aller dans des sommets de couleurs 0 ou 1. Comme  $T_{1,1}$  exclut les cycles de 0 cela correspond bien à atteindre au moins une fois 1 dans une partie infinie.

Donc  $J_1$  a une stratégie gagnante quelque soit le sommet dans  $T_1$ .

- Le raisonnement se généralise à tout jeu de parité faible ayant des couleurs inférieures à  $k$ . Soit  $l$  le premier nombre pair inférieur à  $k$  :

$$Win_0 = | \vee_{n=0, n \text{ pair}}^l \nu X_n. ( [(\vee_{i=0, i \text{ pair}}^n c_i) \wedge t_0(X_n)] \wedge [\mu Y. (c_n \vee t_0(Y))] ) \vee \mu Y. (t_0(Y)) |$$

## 2.4 Jeux de parité et jeux de Büchi

- En ce qui concerne les parties finies, les conditions de victoire sont les mêmes, il n'y a aucun changements à faire. C'est pourquoi on ne regarde que les jeux à parties infinies (on fait la transformation vues en 2.1 qui se fait en temps polynomial). Soit  $G = (V, E)$  un jeu de parité faible. On a vu en cours qu'on pouvait calculer en temps polynomial les stratégies gagnantes pour les deux joueurs (stratégie d'attracteur). On va utiliser ce même calcul pour construire un jeu de Büchi  $G' = (V', E')$  équivalent où les états de Büchi sont  $F$ .

$V' := V$ ,  $E' := \emptyset$ ,  $F' := \emptyset$ .

Soit  $v$  de couleur maximale  $k$  dans  $G$ , si cette couleur est paire,  $J_0$  gagne. Comme on est dans une partie infinie, il existe  $u$  tel que  $(v \rightarrow u) \in E$ . Alors on rajoute :  $V' := V' \cup \{u_0\}$  et  $E' = E' \cup \{(v \rightarrow u_0), (u_0 \rightarrow u_0)\}$  et  $F := u_0$ . On ne rajoutera plus d'arêtes sortantes ni à  $v$  ni à  $u_0$ .  $v$  est donc gagnant pour  $J_0$  dans  $G'$  (car il mène à  $u_0$  qui boucle sur lui-même et qui est final).

On calcule  $A = Attr_0(\chi^{-1}(k))$ . Soit  $u \in A$  tel que  $u \notin \chi^{-1}(k)$ , on prend le plus petit  $n_u$  tel que  $u \in Attr_0^{n_u}(v)$ , il existe  $w \in Attr_0^{n_u-1}(v)$  tel que  $(v \rightarrow w) \in E$  alors on rajoute :  $E' := E' \cup (v \rightarrow w)$ . Ces sommets sont gagnants dans  $G$  si et seulement si ils le sont dans  $G'$ .

Soit  $v$  de couleur maximale  $k$  dans  $G$ , si cette couleur est impaire,  $J_1$  gagne. Comme on est dans une partie infinie, il existe  $u$  tel que  $(v \rightarrow u) \in E$ . Alors on rajoute :  $V' := V' \cup \{u_1\}$  et  $E' = E' \cup \{(v \rightarrow u_0)\}$ . On ne rajoutera plus d'arêtes sortantes ni à  $v$  ni à  $u_1$ .  $v$  est donc gagnant pour  $J_1$  dans  $G'$  (car il mène à  $u_1$  qui boucle sur lui-même et qui n'est pas final).

On calcule  $A = Attr_1(\chi^{-1}(k))$ . Soit  $u \in A$ ,  $u \notin \chi^{-1}(k)$ , on prend le plus petit  $n_u$  tel que  $u \in Attr_1^{n_u}(v)$ , il existe  $w \in Attr_1^{n_u-1}(v)$  tel que  $(v \rightarrow w) \in E$  alors on rajoute :  $E' := E' \cup (v \rightarrow w)$ . Ces sommets sont gagnants dans  $G$  si et seulement si ils le sont dans  $G'$ .

On recommence ces mêmes opérations en réduisant  $G$  aux sommets  $V \setminus A$  et ainsi de suite jusqu'à avoir un ensemble vide.

On a clairement construit  $G'$  en temps polynomial et  $V \subseteq V'$ . On a vu qu'un sommet de  $V$  étant gagnant dans le jeu de parité faible si et seulement si il l'était dans le jeu de Büchi. A partir d'une stratégie gagnante de Büchi on en déduit facilement une stratégie gagnante dans  $G$ . En effet, dans  $G$ , chaque sommet n'a qu'un successeur. Ainsi, la stratégie gagnante dans le jeu de Büchi consiste à prendre le successeur. On en déduit (par construction) la stratégie gagnante dans le jeu de parité faible, à  $v$  on associe  $\sigma(v)$  tel que  $\sigma(v)$  est le successeur de  $v$  dans le jeu de Büchi privé de son indice s'il en a un.

- Remarque : J'ai utilisé ce fait pour construire le jeu de Büchi équivalent. Cela me fait donc penser qu'il doit y avoir une autre façon de faire.  
A la question précédente, on a réduit un jeu de parité faible à un jeu de Büchi. Or les jeux de Büchi ont des stratégies gagnantes positionnelles. Comme on n'a pas utilisé de mémoire pour la transformation, on en déduit que les jeux de parité ont des stratégies gagnantes positionnelles.
- Si la couleur maximale dans le jeu est paire, on peut voir ce jeu dans un premier temps comme un jeu d'accessibilité où il faut attendre cette couleur. Cependant, lorsqu'on réduit le jeu, il n'est pas possible d'enlever tous les états de couleur maximale car on n'aurait plus forcément la somme des probabilités sortant de chaque noeud égale à 1, il faudrait sans doute faire une construction. Donc comme le jeu de parité est défini de manière constructive et à information complète, intuitivement on peut penser que c'est le cas.

### 3 Jeux de parité et algorithmes

Soit une arène coloriée  $\mathcal{A}$ ,  $v \in V$  et  $\sigma$  une stratégie pour  $J_0$ .  $\sigma$  est gagnante pour  $J_0$  à partir de  $v$ , si quelque soit ce que joue  $J_1$  au cours de la partie, la couleur maximale infiniment répétée est paire.

Dans un premier temps, on restreint le graphe aux sommets accessibles depuis  $v$  (en effet, les autres sommets ne vont jamais intervenir dans la partie car on considère qu'elle débute en  $v$ ). A partir de  $\sigma$ , on peut réduire l'arène  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{A}'$  en enlevant les arêtes sortant d'un sommet de  $J_0$  qui ne suivent pas la stratégie : soit  $(v, w) \in \mathcal{A}$ , si  $v \in V_1$  ou  $(v \in V_0$  et  $\sigma(v) = w)$  alors  $(v, w) \in \mathcal{A}'$  sinon  $(v, w) \notin \mathcal{A}'$ . Cela revient donc à considérer un jeu à un joueur ( $J_1$ ).

Il apparaît évident que pour que  $J_1$  gagne, il suffit qu'il trouve un chemin qui mène à un cycle dans lequel la plus grande couleur des sommets est impaire. On va appeler un tel cycle *cycle impaire* et un cycle dont la plus grande couleur est paire, *cycle paire*. On en déduit que  $\sigma$  est gagnante pour  $J_0$  si et seulement si il n'y a pas de cycle impaire dans  $\mathcal{A}'$ . L'algorithme consiste donc à vérifier cette propriété.

La première idée qui vient donc à l'esprit est de calculer toutes les stratégies pour le joueur  $J_1$  (et donc tous les chemins possibles) afin de détecter les cycles. Dès qu'on en détecte un, on vérifie que la couleur maximale rencontrée est paire. Cependant cet algorithme est exponentiel ( $\mathcal{O}(\Delta^n)$ ) où  $\Delta$  est le nombre maximal d'arc sortant d'un sommet de  $J_1$ .

Il nous faut donc trouver un autre moyen. Pour cela on considère les sous-arènes  $\mathcal{A}_k$  induites de  $\mathcal{A}'$  par l'ensemble des sommets de couleur au plus  $k$  pour tout  $k$  impair. Vérifier qu'il n'y a pas de cycle impaire dans  $\mathcal{A}'$  revient à vérifier qu'il n'y a pas dans l'arène  $\mathcal{A}_k$  de composantes fortement connexes dont l'un des sommets est de couleur  $k$  et ce pour tous les  $k$  impairs. Cette vérification peut-être faite dans l'arène  $\mathcal{A}_k$  à l'aide de l'algorithme linéaire de Tarjan par exemple :

Pour toutes les couleurs  $k$  impaires

$A' :=$  sous-graphe induit de  $A$  par les sommets de couleurs inférieurs à  $k$

$C := \text{Tarjan}(A')$

Pour toutes les composantes fortement connexes de  $C$  de taille  $> 1$   
(excepté si boucle sur lui-même)

Si l'une des couleurs rencontrées est égale à  $k$

Renvoyer faux

Renvoyer vrai

Le sous-graphe induit peut-être construit en temps polynomial (dès qu'un sommet n'est pas de couleur inférieur à  $k$ , on le supprime lui et toutes ses arêtes). L'algorithme de Tarjan est linéaire. L'union des composantes fortement connexes a pour taille dans le pire des cas le nombre de sommets de l'arène, ce qui fait qu'on peut vérifier chaque élément en temps linéaire. Finalement, l'algorithme est polynomial (dépend du nombre de couleurs).

### 3.1 Jeux de parité sur des arènes sans grands cycles

On calcule la région gagnante pour  $J_0 : Win_0$ . On en déduira la région gagnante pour  $J_1 : Win_1 = V \setminus Win_0$ .

On va dans un premier temps montrer que

$Win_0 = Attr_0(\{v \in V | (\chi(v) \text{ est pair}) \text{ et } (v \text{ est un sommet puits ou } (v \in V_0 \text{ et } v \text{ a une boucle } (v, v)))\})$ .

Si  $v \in Win_0$  alors  $J_0$  peut forcer en un nombre fini de coups à aller soit dans un sommet puits de couleur paire ; soit dans un sommet de  $J_0$  de couleur paire qui aura donc pour stratégie de boucler sur lui-même.

Dans les deux cas, la couleur vue infiniment souvent est paire.

On pose  $W = V \setminus Win_0$ . Si  $v \in W$  alors  $J_1$  gagne à partir de  $v$  : Si  $v \in V_0$  alors il reste dans  $W$  sinon il aurait été pris lorsqu'on calculait l'attracteur. Si  $v \in V_1$ , alors il existe au moins un arc qui lui permet de rester dans  $W$ , sinon il aurait été pris lorsqu'on calculait l'attracteur. Enfin les seuls cycles qui existent dans  $W$  sont des boucles sur des sommets impairs. Comme l'arène est finie, ceci fait qu'en choisissant pour stratégie de  $J_1$  de rester toujours dans  $W$  on va finir par toucher un sommet de  $J_1$  ou  $J_0$  qui boucle sur lui-même et de couleur impaire.

On en déduit l'algorithme. On considère qu'à partir d'un sommet, on a accès à ses successeurs et à ses prédécesseurs. De plus on a une liste  $L$  contenant : des sommets puits de couleur paire et des sommets non puits de  $J_0$  qui bouclent sur eux-mêmes et qui sont de couleur paire. On peut éventuellement calculer cette liste en  $\mathcal{O}(m)$ .

Win est l'ensemble vide.

Tab est le tableau de taille le nombre de sommets de  $J_1$  initialisé à 0.

Pour chaque sommet  $v$  dans  $L$

  Pour chaque prédécesseur  $w$  de  $v$

    Si  $w$  appartient à  $J_0$  alors on le rajoute à Win

    Si  $w$  appartient à  $J_1$ ,

      alors On incrémente de 1 la case de Tab correspondante

      Si cette case atteint le degré sortant

        alors on rajoute  $w$  à Win.

Win est la partie gagnante de  $J_0$

$W \setminus Win$  est la partie gagnante de  $J_1$ .

On ne traite qu'une fois chaque sommet et ne visite qu'une fois les arcs. Donc cet algorithme est en temps  $\mathcal{O}(n + m)$  où  $n = |V|$  et  $m = |E|$ .