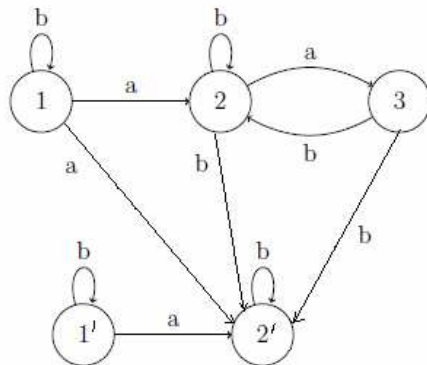


## Automates à parité et automates de Büchi

### Exemple

1. Le langage reconnu par A est  $L_A = b^* a (b^* ab)^* b^\omega$   
La formule LTL qui décrit ce langage est :  $b \hat{U} a [(b \hat{U} ab) \hat{U} Gb]$
2. Automate de Büchi équivalent :



### Parité et Büchi

- a) Un automate de Büchi accepte un mot infini  $w$  si, au cours de l'exécution, on passe infiniment souvent par un ensemble d'états  $F$ . Il suffit donc d'attribuer à ces états la couleur 2 et aux autres la couleur 1 pour que l'automate à parité défini ainsi reconnaisse les mêmes mots. On préserve bien l'ensemble des états et la relation de transition.
- b) On peut construire un automate de Büchi non déterministe à partir d'un automate à parité. Pour cela, il suffit d'ajouter à l'automate à parité  $A$  de départ tous les états de couleurs inférieures ou égales à la couleur maximale paire rencontrée ainsi que toutes les transitions associées. De cette façon, une fois que le mot étudié passe dans un de ces nouveaux états, il ne peut plus attendre de couleur plus grande est boucle infiniment souvent par l'état de couleur maximale paire. On ajoute au plus  $n$  états et  $m$  transitions donc la taille de l'automate de Büchi est bien polynomiale en celle de l'automate de départ.

### Jeux de parité faible

#### Transformation en jeu à parties infinies

Pour que toutes les parties dans  $G'$  soit infinies, il faut empêcher les situations dans lesquelles un joueur est bloqué. Pour cela, on ajoute au graphe  $G$  toutes les transitions manquantes vers deux nouveaux états puits  $p_1$  et  $p_2$  de couleur respective  $2n + 1$  et  $2n + 2$  où  $n$  est le nombre de sommet du graphe  $G$ . Une fois un état puits est atteint, il suffit de boucler sur celui-ci pour rendre la partie infinie. Les états  $p_1$  et  $p_2$  ont donc les couleurs maximales de l'arène afin de ne pas prendre en compte les couleurs des états atteints au début de la partie.

Si  $J_0$  était bloqué dans  $G$ , la nouvelle transition dans  $G'$  mène vers  $p_1$ . Ainsi la plus grande couleur rencontrée est impair et  $J_1$  gagne, ce que l'on retrouve dans  $G$ . De la même façon, si  $J_1$  était bloqué dans  $G$ , la seule option qui se présente alors à lui dans  $G'$  est d'aller vers  $p_2$  qui a la couleur maximale paire donc  $J_0$  gagne.

Les régions gagnantes dans  $G'$  sont les mêmes que celles dans  $G$  sauf que l'on ajoute  $p_1$  pour  $J_1$  et  $p_2$  pour  $J_0$ .

### Exemple

$Win_0 = \{a, c, e, f, g\}$

Stratégie gagnante pour  $J_0$  :

$a \rightarrow a$

$f \rightarrow c$  ou  $f \rightarrow g$

$g \rightarrow c$  ou  $g \rightarrow f$

Il n'y a pas de stratégie gagnante depuis  $d$  puisque l'on a déjà atteint la couleur maximale de l'arène et elle est impaire.

### Positions gagnantes et $\mu$ -calcul

- $Win_0$  est constitué de tous les sommets de couleur 0 ayant tous leurs successeurs de couleur 0 pour les sommets de  $J_1$  et au moins un successeur de couleur 0 pour les sommets de  $J_0$  ainsi que les sommets de  $J_1$  n'ayant aucun successeur :

$$\mu X_1. (\nu X_0. (c_1 \wedge ((p_0 \wedge \langle \rangle X_1) \vee (p_1 \wedge \Box X_1))) \vee (c_0 \wedge (p_0 \wedge \langle \rangle X_0) \vee (p_1 \wedge \Box X_0)))$$

- $Win_0$  est constitué de tous les sommets vus précédemment ainsi que des sommets de couleur 1 n'ayant aucun successeur pour les sommets de  $J_1$  et, pour les sommets de  $J_0$ , au moins un successeur vers un sommet puis de  $J_1$  ou au moins un successeur de couleur 2 et tous les sommets de couleur 2 :

$$\nu X_2. \mu X_1. \nu X_0. (c_2 \wedge ((p_0 \wedge \langle \rangle X_2) \vee (p_1 \wedge \Box X_2))) \vee (c_1 \wedge ((p_0 \wedge (\langle \rangle X_1 \vee \langle \rangle X_2) \vee (p_1 \wedge \Box X_1))) \vee (c_0 \wedge (p_0 \wedge \langle \rangle X_0) \vee (p_1 \wedge \Box X_0)))$$

- On procède de la même façon pour  $k$  couleurs. Si  $k = 2n$  :

$$\nu X_{2n}. \mu X_{2n-1} \dots \nu X_0. (c_{2n} \wedge ((p_0 \wedge \langle \rangle X_{2n}) \vee (p_1 \wedge \Box X_{2n}))) \vee (c_{2n-1} \wedge ((p_0 \wedge (\langle \rangle X_{2n-1} \vee \langle \rangle X_{2n}) \vee (p_1 \wedge \Box X_{2n-1}))) \vee \dots \vee (c_0 \wedge (p_0 \wedge \langle \rangle X_0) \vee (p_1 \wedge \Box X_0)))$$

Si  $k = 2n + 1$  :

$$\mu X_{2n+1}. \nu X_{2n} \dots \nu X_0. (c_{2n+1} \wedge ((p_0 \wedge \langle \rangle X_{2n+1}) \vee (p_1 \wedge \Box X_{2n+1}))) \vee (c_{2n} \wedge ((p_0 \wedge \langle \rangle X_{2n}) \vee (p_1 \wedge \Box X_{2n}))) \vee \dots \vee (c_0 \wedge (p_0 \wedge \langle \rangle X_0) \vee (p_1 \wedge \Box X_0)))$$

### Jeux de parité et jeux de Büchi

- Pour transformer un jeu de parité faible en un jeu de Büchi, il faut commencer par rendre toutes les parties du jeu de parité faible infinies. Pour cela, on procède de la manière décrite à la question 2.1. Ensuite, on remplace les transitions d'un état  $p$  de couleur  $i$  vers un état  $q$  de couleur  $i - 1$  par des transitions de  $p$  vers un état  $q'$  de couleur  $i$ . On recopie aussi toutes les transitions depuis les nouveaux états vers leurs états cibles. Ainsi, une fois qu'une couleur  $i$  est atteinte, l'automate de Büchi reste dans un ensemble d'états de cette couleur. Les états finaux de l'automate de Büchi sont les états de couleur maximale paire dans l'automate de parité de départ ainsi que tous les états copiés pour cette couleur.

- Dans un jeu de parité faible la stratégie gagnante consiste à atteindre au moins une fois un état de couleur paire la plus grande possible et empêcher  $J_1$  d'attendre une couleur plus grande ou à atteindre un état de  $J_1$  sans successeur (qui sera considéré comme un état de couleur  $2n$ ). Dans un jeu de Büchi, les états sur lesquels on boucle infiniment sont les états de la couleur paire maximale pour le jeu de parité faible. Trouver une stratégie gagnante dans un jeu de Büchi permet donc de trouver une stratégie gagnante dans un jeu de parité faible équivalent. On a donc bien une stratégie gagnante positionnelle dans le jeu de parité faible.

## Jeux de parité et algorithmes

`gagnante(arène coloriée A, sommet v, stratégie positionnelle  $\sigma$ )`

`début`

```

entier max ← c(v)
entier compteur ← 0
si v ∈ σ
    alors  sommet v1 ← σ(v)
           tant que v1 != v && compteur < n faire
               si c(v1) > max
                   alors max ← c(v1)
               v1 ← σ(v)
               compteur ++
si max mod 2 = 0
    alors retourner vrai
    sinon retourner faux

```

`fin`

On suppose que l'on a une fonction  $c: V \rightarrow \mathbb{N}$  qui renvoie la couleur d'un sommet  $v$  passé en paramètre.

L'arène est composée au maximum de  $n$  sommets donc, au bout de  $n - 1$  coups, on est sûr d'avoir atteint la couleur maximale au moins une fois en suivant la stratégie positionnelle  $\sigma$ . L'algorithme est bien polynomial puisqu'il s'exécute en temps  $O(n)$ .

## Jeux de parité sur des arènes sans grands cycles

gagnantes(arène finie coloriée  $G$ )

début

```
liste win0 <- vide
stratégie positionnelle  $\sigma$ 
pour i de 0 à n faire
    // on cherche les sommets puits gagnants
    si degre sortant de  $v_i = 1$  &&  $c(v_i) \bmod 2 = 0$ 
        alors ajouter  $v_i$  à win0
pour i de 0 à n faire
    si  $v_i \in V_0$ 
        alors
            si  $\text{succ}(v_i) \in \text{win0}$  &&  $v_i \notin \text{win0}$ 
                alors ajouter  $v_i$  à win0
                 $\sigma(v_i) = \text{succ}(v_i)$ 
            sinon
                si  $v_i \notin \text{win0}$ 
                    alors bool tous = vrai
                    pour tout j tel que  $\text{succ}(v_i) = v_j$  faire
                        si  $v_j \notin \text{win0}$ 
                            alors tous = faux
                    si tous
                        alors ajouter  $v_i$  à win0
                         $\sigma(v_i) = \text{succ}(v_i)$ 
```

fin

Cet algorithme est bien polynomial puisqu'il s'exécute en  $O(3n)$ .

On commence par mettre dans la liste des sommets de la région gagnante tous les sommets puits de couleur paire puis on applique une stratégie d'attracteur.