


Fagin

$$\text{FSO} = \text{NP}$$

↳ quantifie sur ensembles, relations, ...

$$\begin{aligned} \rightarrow \exists R_1 \dots \exists R_k \quad \varphi(R_1, \dots, R_k) &:: \varphi \\ &\downarrow \\ &\text{FO} \end{aligned}$$

R_i relations (arité quelconque)

Toute propriété de graphes est dans NP $\Leftrightarrow$ elle est exprimable en FSO

On fixe formule φ de FSO.

Entrée Graphe G

Q : $G \models \varphi$

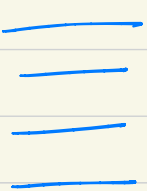
Algo NP : donne les valeurs des relations $R_i \rightsquigarrow$ arité r_i (Axe!),
 $R_i \subseteq V^{r_i}$

et vérifier $G, R_1, \dots, R_k \models \varphi$ (*)
 en PTime !

À la début : $G \models \varphi^{FO}$?

avec φ fixé $\rightarrow$ PTime

(*) On remplace $R_i(x_1, \dots, x_{r_i})$ par

$\bigvee_{\text{tuples de } R_i} (x_1 = v_1 \wedge \dots \wedge x_{r_i} = v_{r_i})$ R_i 

$NP \subseteq \exists FO$

$\downarrow$

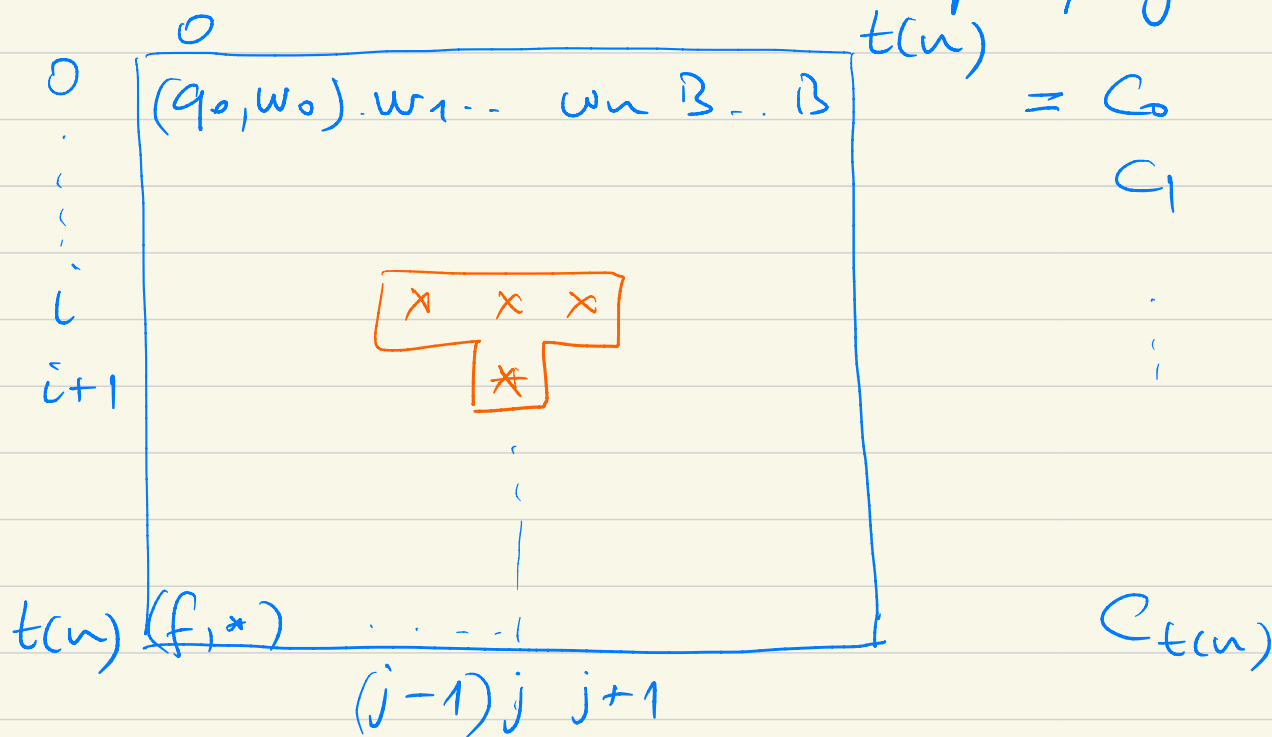
MT non-dét., temps polynomial

entrée : graphe représenté par matrice

0-1 : $Adj_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\underbrace{0 \ 1 \ 0} \quad \underbrace{1 \ 1 \ 0} \quad \dots$

Calcul acc. de MT de temps poly : $|w| = n$



Formule $\exists \Delta 0$ va exprimer l'existence d'un tableau de taille $t(n) \times t(n)$ qui décrit un calcul de la MT sur G .

$\exists$ tableau (tableau = calcul acc)

$$t(n) = n^p - 1 \quad (\text{poly})$$

? $T_a(k, m)$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 instant place

$$0 \leq k \leq n^p - 1$$

$$0 \leq m \leq n^p - 1$$

symbole a à
l'instant k dans
cellule m

$$n = |V|$$

$$G = (V, E)$$

Pour parler de $0, \dots, n-1$ en FSO
on va postuler un ordre total sur V

FSO : $\exists L, S$ (ordre total $\wedge S$ est
 $\downarrow$
 rel. binaire
 succ. de $L \wedge \dots$)

$0 \stackrel{\Delta}{=} \min. \text{ de } L$

$n-1 = \max \text{ de } L$

$n = |V|$

$\text{zero}(v) = \forall w. L(v, w)$

$\text{un}(v) = \exists w. (\text{zero}(w) \wedge S(w, v))$

$\text{max}(v) = \forall w. L(w, v)$

Cas spcial : $p = 1$

$T_a(k, m)$

$\leadsto$ rel. binaire sur

$0 \leq k, m \leq n-1$

V

Cas général :



↳

$$K = (K_1, \dots, K_p)$$

$$m = (m_1, \dots, m_f)$$

k_i, m_j

$$\in \{0, \dots, n-1\}$$

$$Ta(u, m)$$



rel. d'arrivée (2p)

$$T_a(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_p)$$

$$K \rightarrow K+1$$

?

11

11

$$(k_1, \dots, k_p) \quad (k'_1, \dots, k'_p)$$

ex. $n = 3$

$\{0, 1, 2\}$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}_3$$

$$u_{+1} = (2 \ 0 \ 0)_3$$

add. in
base 3

$$\text{succ}(k_1, \dots, k_p, m_1, \dots, m_p) \text{ vrací}$$

$$\Rightarrow (m_1, \dots, m_p)_n = (k_1, \dots, k_p)_n + 1$$

$$\underbrace{x \dots x \quad 0 \quad 1 \quad 2 \dots 2}_K \xrightarrow{+1} \underbrace{x \dots x \quad 1/2 \quad 0 \dots 0}_M$$

Propriétés NP de graphes

$\exists M \& O$
3-COL

$\exists \delta O$

Vertex cover } $|U| = k$
Clique

Cycle ham. $\rightarrow$ ordre

VC, Clique : pour pouvoir parler de k
on marque X sommets et on
demande $|U| = |X|$

$\leadsto$ bij. $\leadsto$ art. 2

$\exists M \& O$ sur les graphes

- peut exprimer des pb. NP-complets
- $G \stackrel{?}{=} \varphi$ peut être NP-c.
(φ étant fixe)

Sur des structures plus simples :

φ (FMSO) fixe

$w \models^? \varphi$

w mot

$T \models^? \varphi$

T arbre

On peut y répondre en PTime

($\rightarrow$ M2. Théorème de Büchi)

φ MSO $\rightarrow$ automate A_φ équv.

φ_A MSO $\leftarrow$ automate A)
équv.

w mot, A aut. fixe

$w \in^? L(A) \rightarrow$ temps $O(|w|)$

Concurrence

Graphes : largeur arborescente (tree-width)
FMSO sur les graphes avec tree-width
borné $\rightarrow$ complexité poly.
 $\rightarrow$ complexité paramétrée

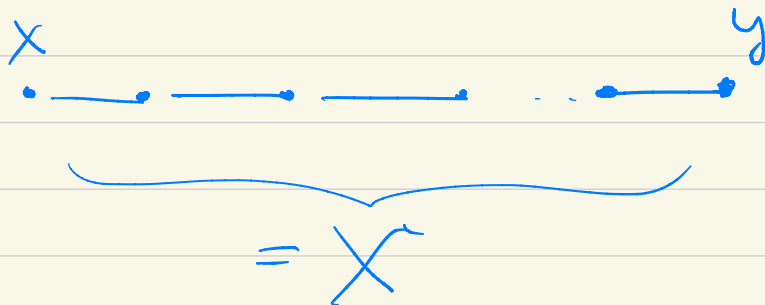
$$\exists x_1 \dots \exists x_k \varphi \rightarrow \text{FO}$$

$R(x,y)$ formule de FMO

$$G \models R(u, v) \quad (\Rightarrow)$$

$\exists$ chemin entre u et v

$$R(x, y) = \exists X (x \in X \wedge y \in X \wedge \psi)$$



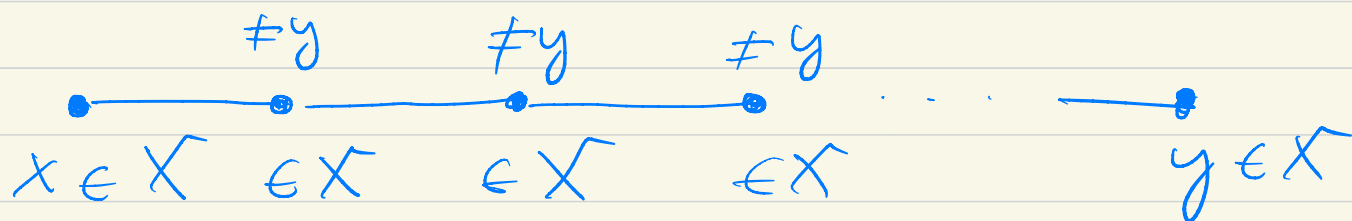
$$\psi \left\{ \begin{array}{l} - x \text{ a unique vertex dans } X \\ - y \text{ ————— } x \\ - \text{ chaque } z \in X - \{x, y\} \text{ a} \\ \text{exactement 2 vertices dans } X \end{array} \right.$$

$$\psi(x,y) = \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$$

$$\psi_3 = \forall z \in X (z \neq x \wedge z \neq y \rightarrow \exists^2 w (w \in X \wedge E(z, w)))$$

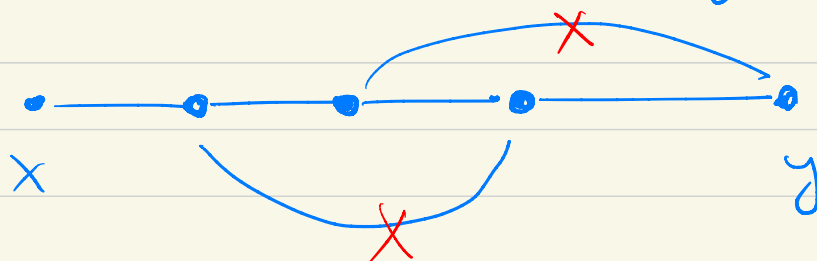
① Si $R(x, y)$, alors $x \overset{*}{\rightsquigarrow} y$.

$\exists X$



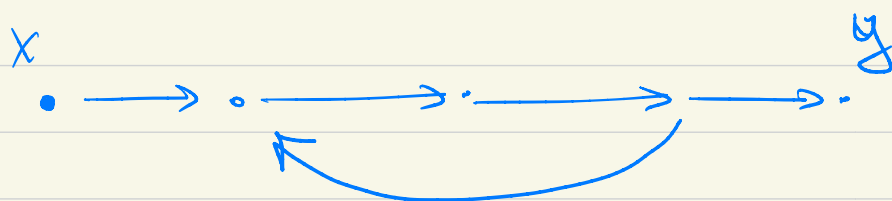
② Si $x \overset{*}{\rightsquigarrow} y$, alors $R(x, y)$

$X :=$ chemin le plus court
entre x, y



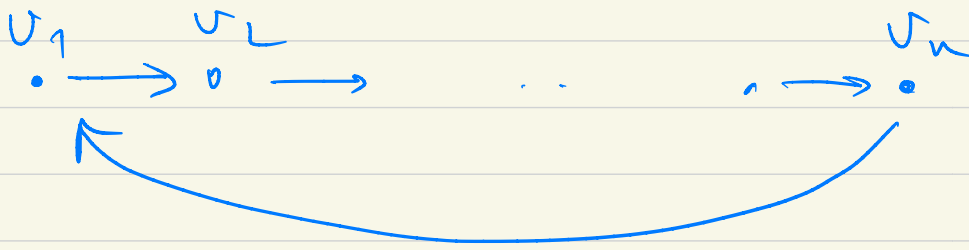
$R(x, y)$ est identifiée avec ce X .

Cette approche ne marche pas en orienté :



Hamiltonicity $\in M \cup O_2$

$\uparrow$ quantif sur
ens. de sommets/
arêtes



$\exists$ ens. d'arêtes $F \subseteq E$ tq.

① - $\forall (u,v) \in F \exists (v,w) \in F$

② - $\forall u \exists! e \exists! v$ tq. $e \in F \wedge (u,e,v)$

arêtes
 $\exists Z. \left[\begin{array}{l} \forall e \in Z. \exists x,y. ((x,e,y) \wedge \\ \exists e' \in Z. \exists x',y'. (x',e',y') \\ \wedge x' = y) \wedge \\ \varphi_2 \wedge \varphi_3 \end{array} \right]$

$\uparrow$
 φ_2

$\varphi_3 = \forall x,y \exists \text{ chemin } x \xrightarrow{*} y$
 $\subseteq F$