

Question 1 Un flocon de neige est un graphe non-orienté $G = (V, E)$ de la forme suivante :

- l'ensemble des sommets V consiste d'un sommet-centre c et de deux ensembles disjoints V_1 et V_2 ;
- le sommet c est relié à chacun des sommets de V_1 (qui ne sont pas reliés entre eux) ;
- chaque sommet de V_2 est relié à exactement un sommet de V_1 ;
- tous les sommets de V_1 ont le même degré.

1. Ecrivez une formule de SO (logique du second ordre) qui décrit exactement les flocons de neige.
2. Justifiez qu'il n'existe aucune formule de FO (logique du premier ordre) qui décrit exactement les flocons de neige.

Indication : vous pouvez soit utiliser les jeux de Ehrenfeucht-Fraïssé, ou appliquer une réduction FO d'un langage vers ce problème.

Question 2 *Rappel* : les formules de la logique du premier ordre FO(succ) interprétées sur des mots de Σ^* sont construites à partir des formules atomiques $a(x)$ ($a \in \Sigma$), $y = x + 1$, $x = y$, $\min(x)$, $\max(x)$ en utilisant les opérateurs booléens \wedge, \vee, \neg et les quantificateurs \exists, \forall .

1. Ecrivez une formule MSO pour le langage $(a^+b^+c^+)^+$.
2. (bonus) Ecrivez une formule de FO(succ) pour $(a^+b^+c^+)^+$.
3. Montrez que pour le langage $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ qui suit il n'existe pas de formule de FO(succ) le décrivant :

pour toute position étiquetée par a il existe une position étiquetée par b à droite

Pour cela, vous allez proposer pour chaque $k > 0$ deux mots $u_k, v_k \in \{a, b, c\}^*$ tels que $u_k \in L$, $v_k \notin L$ et une stratégie gagnante de Duplicateur pour k tours sur u_k, v_k .

Rappel : Pour le jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé pour FO(succ), Duplicateur gagne en k tours si les positions a_1, \dots, a_k choisies dans u_k sont "isomorphes" aux positions b_1, \dots, b_k choisies dans v_k :

- $a_i = a_j$ ssi $b_i = b_j$,
 - $a_i = a_j + 1$ ssi $b_i = b_j + 1$,
 - a_i est la première (dernière) position de u_k ssi b_i est la première (dernière) position de v_k ,
 - a_i et b_i ont la même étiquette.
4. Que pouvez-vous dire si le langage L du point précédent est sur l'alphabet $\{a, b\}$ au lieu de $\{a, b, c\}$?

$$L \subseteq \{a, b, c\}^*$$

$$L^c = \Sigma^* a c^*$$

? FO($<$) φ : $L(\varphi) = L$

$$\varphi = \forall x. (a(x) \wedge \exists y. (b(y) \wedge x < y))$$

$$\varphi = \forall x. (a(x) \rightarrow \exists y. (b(y) \wedge x < y))$$

? FO(succ) φ' : $L(\varphi') = L$

Find u_k, v_k with $u_k \in L, v_k \notin L$
and D with the EF game with k
moves on u_k, v_k .

↑ for FO(succ)
(+ min/max)

$$a \underbrace{c \dots c}_k b$$

large wrt. k

$$u_k = c^k a c^k b c^k \in L$$

$$v_k = c^k a c^k \notin L$$

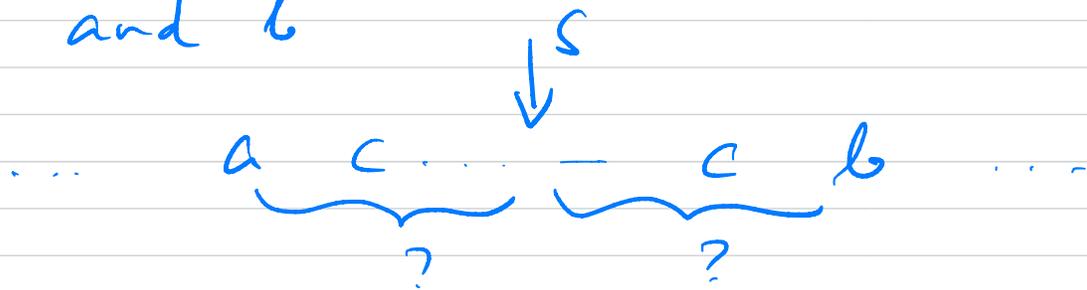
not good, \exists can win in 1 round

$$u_k = c^N a c^N b c^N \in L$$

$$v_k = c^N b c^N a c^N \in L$$

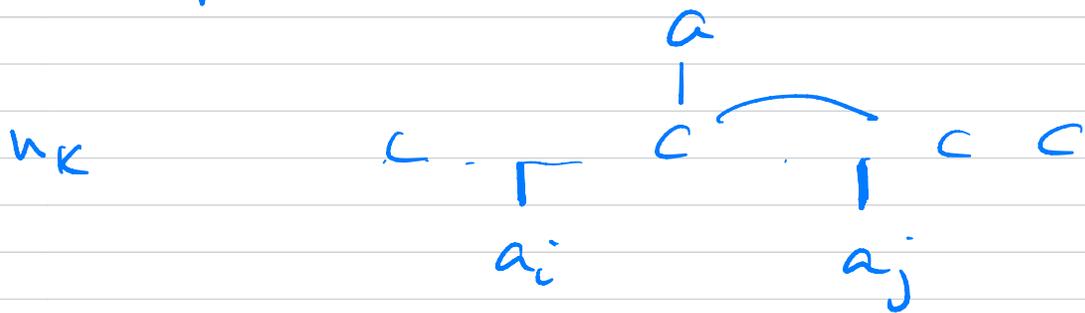
Strategy for D :

- if S chooses a , $\rightarrow D$ answers with a/b
- if S chooses c , say between a and b



D should answer according to the distance to a and b , resp.

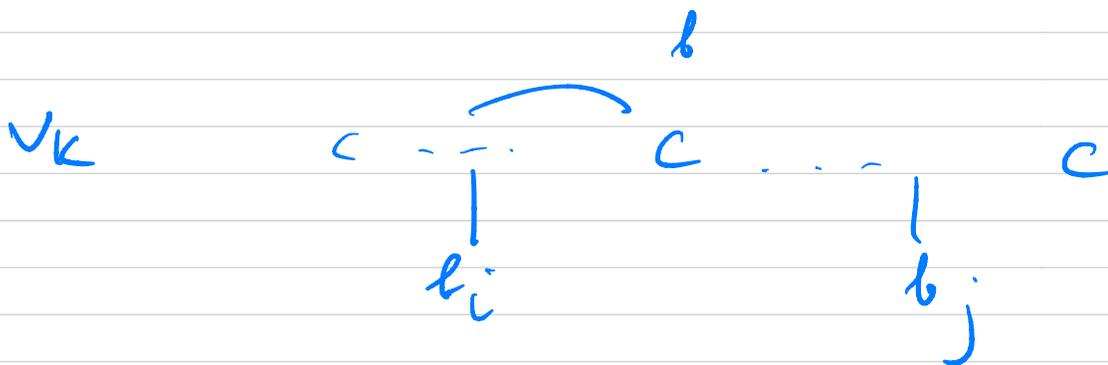
Suppose that l rounds are left and



a_i, a_j are previously chosen positions

$$d(a, a_i), d(a, a_j)$$

$$|a - a_i| \quad |a - a_j|$$



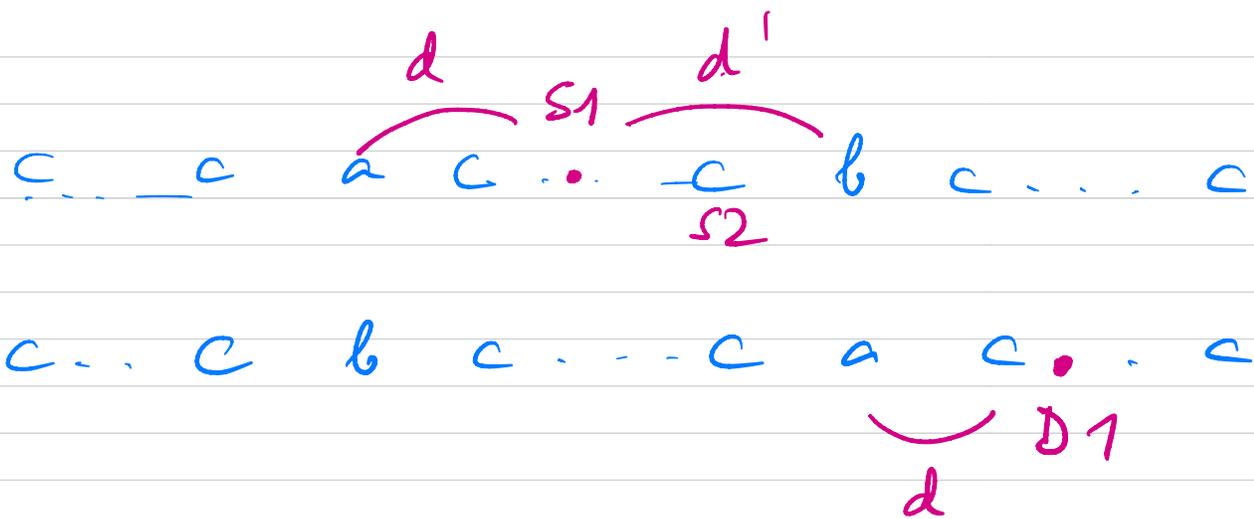
D chooses b s.t.

- if $|a - a_j| > 2^l$ then

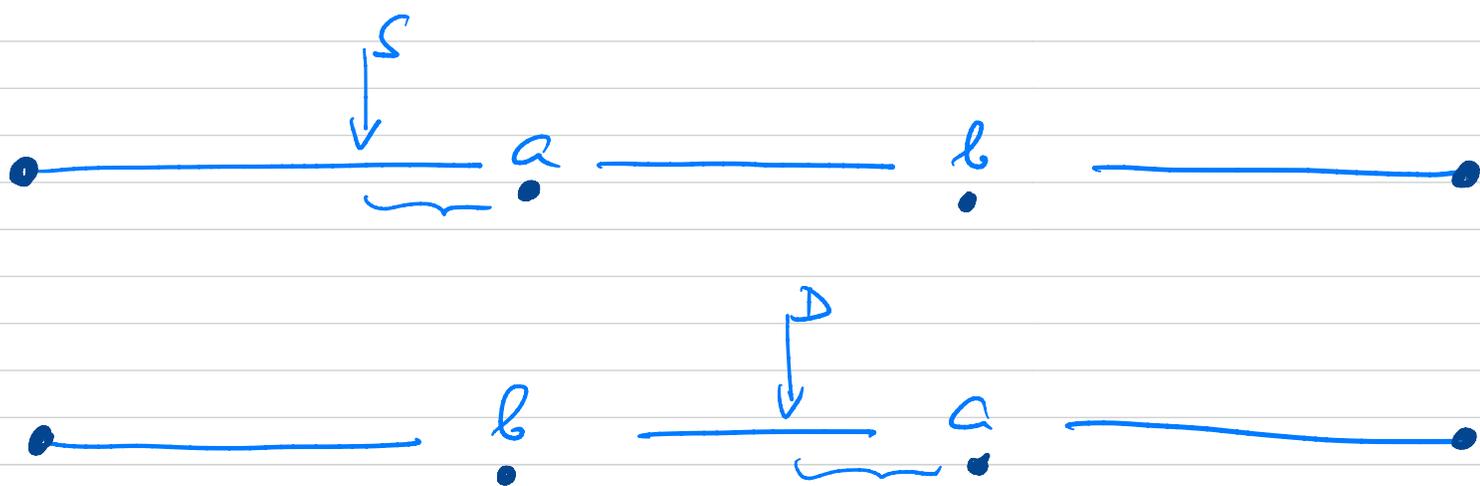
$$|b - b_j| > 2^l$$

- if $|a - a_j| \leq 2^l$ then

$$a - a_j = b - b_j$$



$$d \leq d'$$



Invariant a_1, \dots, a_ℓ chosen in u_k
 b_1, \dots, b_ℓ chosen in v_k
 S chooses a , D responds by b

$$\forall a' \in \{a_1, \dots, a_\ell\} \quad \forall b' \in \{b_1, \dots, b_\ell\}$$

$$(1) \quad a - a' = b - b' \leq 2^{k-\ell-1} \quad \text{or}$$

$$(2) \quad d(a, a'), d(b, b') > 2^{k-\ell-1}$$



$$|a_1 - a_2| < 2^{k-2}$$

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2$$

Rem $|a_1 - a_2| < 2^{k-2}$ and

$|a - a_2| < 2^{k-2}$ then

$$|a_1 - a| < 2^{k-1}$$

Inv
 \Rightarrow

$$b_1 - a = a_1 - a$$

Every 'a' has a 'b' to the right

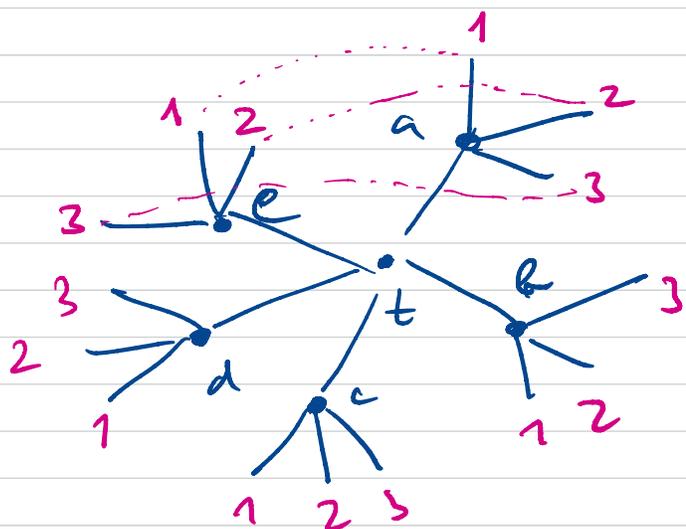
$$L \subseteq \{a, b\}^* \quad (\Rightarrow) \quad L = \{a, b\}^* b$$

? FO (succ)



Flocons de neige

$$R = \{(a_1, b_1), (b_1, c_1), \dots, (e_1, a_1)\}$$



$$\text{deg}(a) =$$

$$\text{deg}(b) = \dots$$

$$V_1 = \{a, b, \dots, e\}$$

$$V_2 : \text{rest}$$

$\exists \emptyset$

$$\varphi_0(x) \begin{cases} \varphi_0(t) \text{ is true} \\ \varphi_0(v) \text{ is false } \forall v \neq t \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) \quad \varphi_1(v) \text{ is true } \Leftrightarrow v \in V_1$$

$$\varphi_2(x) \quad \dots \quad v \in V_2$$

$\varphi_{\text{deg}} \hat{=} \text{all } v \in V_1 \text{ have same degree}$

$$\varphi_{\leq 2}(x): \quad d(x, y) \leq 2, \forall y$$

$$\varphi_{\leq 2}(x) \stackrel{=} {=} \forall y. \left(x = y \vee E(x, y) \vee \exists z. (E(x, z) \wedge E(z, y)) \right)$$

$$\varphi_0(x) = \varphi_{\leq 2}(x) \wedge \forall y \neq x. \neg \varphi_{\leq 2}(y)$$

$$\varphi_1(x) = \exists y. (\varphi_0(y) \wedge E(x, y))$$

$$\varphi_2(x) = \neg \varphi_0(x) \wedge \neg \varphi_1(x)$$

$$\varphi_{\text{edges}} = \forall x \forall y [E(x, y) \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & (\varphi_0(x) \wedge \varphi_1(y)) \vee \\ & (\varphi_1(x) \wedge \varphi_0(y)) \vee \\ & (\varphi_1(x) \wedge \varphi_2(y)) \vee \\ & (\varphi_2(x) \wedge \varphi_1(y)) \end{aligned}$$

$$\varphi_{\text{deg}} = \exists R \left[\begin{array}{l} \forall x \exists! y R(x, y) \wedge \\ \forall y \exists! x R(x, y) \wedge \\ \forall x, y. R(x, y) \rightarrow \\ (\varphi_2(x) \wedge \varphi_2(y)) \wedge \\ \nexists z. \varphi_1(z) \wedge E(x, z) \wedge \\ E(y, z) \end{array} \right]$$

↑
binary



$$\rightarrow \psi'_{\text{deg}}(x, y) \stackrel{\wedge}{=} \text{deg}(x) = \text{deg}(y)$$

\exists bij. between neighbors of x and neighbors of y

$$\exists R \left(R(z, z') \rightarrow (E(x, z) \wedge E(y, z')) \right)$$

$$\wedge \left(\forall z. E(x, z) \exists! z'. E(y, z') \wedge R(z, z') \right)$$

$$\wedge \left(\forall z'. E(y, z') \exists! z. E(x, z) \wedge R(z, z') \right)$$

$$\forall x \forall y \left[(\varphi_1(x) \wedge \varphi_1(y)) \rightarrow \psi'_{\text{deg}}(x, y) \right]$$

$$\text{A simple rel. } R = \left\{ (a_1, b_1), (a_1, c_1), \dots \right. \\ \left. (e_1, c_1), \right. \\ \left. (a_2, b_2), \dots \right. \\ \left. \dots \right\}$$

$$G = C_n \cup C_n'$$

C_n : cycle of length n

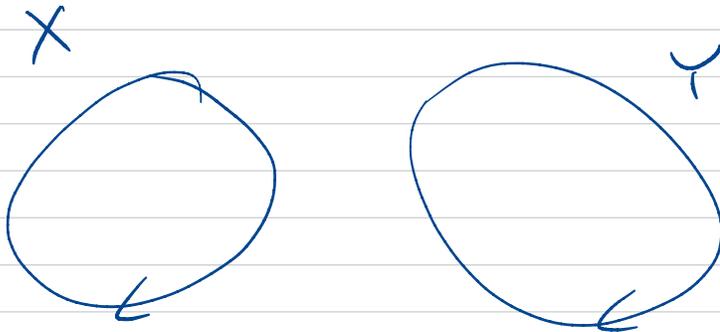
$$n=4$$



So formula Ψ

$G \models \Psi \iff G$ union of 2 cycles of same size

$\exists X \exists Y$ (cycle $(X) \wedge$ cycle $(Y) \wedge$
 partition $(X, Y) \wedge$
 same-size (X, Y)).



$\forall x$ [$\Psi \text{deg}=2(x) \wedge$ connected $(X) \wedge$
 connected $(Y) \wedge$

no-edges between $X, Y \wedge$
same side (X, Y)]



$$\exists R. [\forall x, y. (R(x, y) \rightarrow x \in X \wedge y \in Y) \\ \wedge \\ \forall x \exists! y. R(x, y) \wedge \\ \forall y \exists! x. R(x, y)]$$

Connected (X) =

MNO \nearrow

$$\exists X_1, X_2 (\text{Part. } (X_1, X_2, X) \wedge \\ \exists x. (x \in X_1) \wedge \\ \exists y. (y \in X_2) \wedge \\ \forall x, y. (x \in X_1 \wedge y \in X_2 \\ \rightarrow \neg E(x, y)))$$