

Université Bordeaux 1. Master Sciences & Technologies,
Informatique. Examen UE INF 461, Modèles de calcul.

Responsable A. Muscholl

Session 1, 2009–2010. 15 décembre 2009, 14h-17h.

Documents autorisés : transparents du cours et notes de TD.

*Le barème est indicatif. Les exercices marqués par * ne sont pas nécessaires pour atteindre 20/20 (et n'ont pas de barème). A noter que le bareme total dépasse 20 points.*

Vous pouvez choisir entre les deux derniers exercices no. 7.

On attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.

Exercice 1 Répondez par “Vrai” ou “Faux” aux questions suivantes. **Détachez et joignez cette première feuille à votre copie.** Notation : 0,5 par réponse juste et $-0,5$ par réponse fausse. Le résultat final sera le maximum entre 0 et la somme des points réalisés.

On rappelle que les notions “récuratif” et “décidable” sont équivalentes. De même pour “récurivement-énumérable” et “semi-décidable”.

	Vrai	Faux
1 Il existe des langages à la fois semi-décidables <i>et</i> indécidables.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 Le complémentaire d'un langage semi-décidable est aussi semi-décidable.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 A se réduit à B si et seulement si B se réduit à A .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4 S'il existe une réduction de A à B , alors on peut utiliser un algorithme donné pour A , afin de résoudre B .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5 On sait décider si deux MT M et M' acceptent le même langage.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6 Toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = f(n_0)$ pour tout $n \geq n_0$ (pour un certain n_0) est une fonction calculable.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7 On sait décider, étant donné un automate fini \mathcal{A} et une MT M , si \mathcal{A} et M acceptent le même langage.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8 Tout sous-ensemble d'un ensemble décidable est décidable.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9 Il existe des ensembles décidables qui ne possèdent <i>aucun</i> sous-ensemble décidable.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10 Si A se réduit à B par une réduction polynomiale et $B \in \mathbf{NP}$, alors $A \in \mathbf{NP}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11 On peut décider SAT avec un algorithme exponentiel.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12 Si A se réduit à un langage fini F , alors A est décidable.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13 Il existe des problèmes indécidables dont le complémentaire appartient à \mathbf{NP} .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
14 Il existe une réduction de SAT au problème de l'arrêt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Exercice 2 (4 points) Décrivez de façon informelle (mais précise!) une MT déterministe pour chacun des langages $L_i \subseteq \{a, b\}^* \# \{a, b\}^*$ suivants. Votre MT peut utiliser plusieurs bandes :

- $u \# v \in L_1$ ssi u précède v en ordre lexicographique.
- $u \# v \in L_2$ ssi v est le successeur de u en ordre hiérarchique.

Rappel : l'ordre hiérarchique sur $\{a, b\}^* : \epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots$. En ordre lexicographique : $a < aba < abba < b < babb, \dots$

Exercice 3 (3 points) 1. Donnez un exemple d'un langage semi-décidable L_1 tel que le complémentaire de L_1 n'est pas semi-décidable.

2.* Donnez un exemple d'un langage L_2 qui n'est pas semi-décidable, tel que le complémentaire de L_2 n'est pas semi-décidable non plus.

Justifiez bien vos réponses.

Exercice 4 (2+2+3 points) Soit M une MT déterministe à une bande, et w une entrée de M . On note par $\text{espace}_{M,w}$ la fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{N} , qui associe à chaque entier $t \in \mathbb{N}$ le nombre de cases différentes visitées par M pendant les t premiers pas de calcul à partir de la configuration initiale $q_0 w$. En particulier, si M s'arrête après t_0 pas, alors $\text{espace}_{M,w}(t) = \text{espace}_{M,w}(t_0)$ pour tout $t \geq t_0$.

Une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ s'appelle *bornée*, s'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Est-ce que $\text{espace}_{M,w}$ est bornée si M s'arrête sur w ? Qu'en est-il du cas où M ne s'arrête pas sur w ?
2. Soit N la MT déterministe qui simule M , en rajoutant les transitions supplémentaires suivantes :
 - avant de commencer la simulation, N place un marqueur $\#$ sur le premier blanc après l'entrée w ;
 - après chaque pas de simulation de M , la machine N déplace le marqueur $\#$ d'une case à droite.

La machine N accepte ssi M accepte.

Qu'est-ce qu'on peut dire sur $\text{espace}_{N,w}$ par rapport à la longueur du calcul de M sur w ?

3. En utilisant les questions précédentes, montrez que le problème suivant est indécidable :

Entrée : MT déterministe M , mot w

Question : Est-ce que $\text{espace}_{M,w}$ est une fonction bornée?

- 4.* En utilisant les questions 1. et 2., montrez que le problème suivant est indécidable :

Entrée : MT déterministe M , mot w

Question : Existe-t-il une configuration C de M atteignable à partir de la configuration initiale de M sur w , et un calcul $C \vdash C_1 \vdash \dots \vdash C_n \vdash C$ bouclant sur C ($n \geq 1$)?

Indication : Pour les 2 dernières questions, vous pouvez réduire à partir du problème de l'arrêt.

Exercice 5 (4 points) Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant, en indiquant bien quelles sont les assertions vraies et quelles sont fausses, et en justifiant les réponses :

1. Soient $A, B \subseteq \{0, 1\}^*$ deux ensembles avec $A \subseteq B$. Alors A se réduit à B , en prenant l'identité $\text{id} : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ comme fonction de réduction.
2. Si A se réduit à B et B est décidable, alors A est décidable.
3. Le problème de l'arrêt $H \subseteq \{0, 1\}^*$ satisfait les hypothèses précédentes, donc il est décidable.

Exercice 6 (3+4 points) Soit $L \in \Sigma^*$. On définit $\text{Pref}(L)$ par :

$$\text{Pref}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \text{il existe } v \in L \text{ t.q. } u \text{ est préfixe de } v\}$$

1. Montrez que $\text{Pref}(L)$ est semi-décidable, si L est décidable.
2. Montrez que $\text{Pref}(L)$ est semi-décidable, si L est semi-décidable.
- 3.* Donnez un exemple de langage L décidable, tel que $\text{Pref}(L)$ n'est pas décidable.

Exercice 7 (5 points) On considère pour cette question des machines RAM avec les instructions vues en cours (incrémentations/décrémentations, sauts (in)conditionnels, stop) et sans entrée/sortie.

- Montrez que la question suivante est décidable :

Entrée : RAM M avec registres initialement nuls, entier k .

Question : Est-il vrai que la valeur d'aucun registre ne dépasse k au cours du calcul de M ?

Indication : considérez le graphe (fini) des configurations avec valeurs inférieures à k .

- Montrez que la question suivante est indécidable :

Entrée : RAM M avec registres initialement nuls, entier k .

Question : Est-il vrai pour *tout* registre, que sa valeur dépasse k au cours du calcul de M ?

Indication : Réduction du problème de l'arrêt des RAM.

Exercice 7 (5 points) On considère les problèmes suivants :

- *Petit-cycle* :

Entrée : graphe orienté G , sommet s , entier k

Question : Existe-t-il un cycle qui contient s et qui passe par au plus k sommets différents ?

- *Grand-cycle* :

Entrée : graphe orienté G , sommet s , entier k

Question : Existe-t-il un cycle simple qui contient s et qui passe par au moins k sommets ? (un cycle simple est un cycle où tous les sommets sont différents)

1. Décrivez un algorithme polynomial qui résout *Petit-cycle*. Justifiez le temps de calcul.
2. Montrez que *Grand-cycle* est **NP**-complet.