

Université Bordeaux 1. Master Sciences & Technologies,
Informatique. Examen UE INF 461, Modèles de calcul.

Responsable A. Muscholl

Session 1, 2010–2011. 20 décembre 2010, 14h-17h.

Documents autorisés : transparents du cours et notes de TD.

Le barème est indicatif. A noter que le bareme total dépasse 20 points.

On attachera une grande importance à la clarté et à la concision des justifications.

Exercice 1 Répondez par “Vrai” ou “Faux” aux questions suivantes. **Détachez et joignez cette première feuille à votre copie.** Notation : 0, 5 par réponse juste et $-0, 5$ par réponse fausse (l’absence de réponse vaut 0 points). Le résultat final sera le maximum entre 0 et la somme des points réalisés.

On rappelle que les notions “récuratif” et “décidable” sont équivalentes. De même pour “récurivement-énumérable” et “semi-décidable”.

	Vrai	Faux
1 On peut énumérer les langages sur l’alphabet $\{0, 1\}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2 On peut énumérer les langages finis sur l’alphabet $\{0, 1\}$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3 Les éléments d’un ensemble semi-décidable peuvent être énumérés en ordre hiérarchique.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4 Si A est un langage décidable, alors le complémentaire de A est aussi décidable.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5 Si A, B sont des langages tels que $A \subseteq B$, alors A se réduit à B .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6 Si A se réduit à B et B se réduit à C , alors A se réduit à C .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7 On sait décider si le langage accepté par un automate fini est fini.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8 On sait décider si le langage accepté par une machine de Turing est fini.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9 Un langage non-vide est décidable si et seulement s’il se réduit au langage $\{1\} \subseteq \{0, 1\}^*$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10 On sait décider si les compteurs d’une machine à compteurs ne dépassent pas 99.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
11 On sait décider si les compteurs d’une machine à compteurs prennent des valeurs arbitrairement grandes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
12 On sait décider si deux machines à compteurs calculent la même fonction.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
13 Aucun problème de la classe NP n’admet un algorithme polynomial.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
14 Si un problème NP -complet admet un algorithme polynomial, alors NP = P .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Exercice 2 (4 points) Décrivez de façon informelle comment énumérer les ensembles suivants :

1. L'ensemble des graphes finis.
2. L'ensemble des formules booléennes propositionnelles en forme normale conjonctive (CNF).

Exercice 3 (6 points) Dans cet exercice on construit une MT M à deux bandes, avec alphabet d'entrée $\{a, b\}$, et qui accepte le langage $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.

1. On suppose que l'entrée z de M est de longueur paire $2n \geq 2$ et que la tête sur la première bande est positionnée sur la case $n + 1$. On suppose aussi que le contenu de la deuxième bande est $\square\square\dots$ et que sa tête est positionnée sur la case 1.

Construisez la MT M' qui vérifie que z est bien de la forme ww (pour un $w \in \{a, b\}^*$) à partir de la situation décrite ci-dessus.

Indication : Vous pouvez représenter M' soit en tant qu'automate, ou en énumérant ses transitions.

2. Décrivez de façon informelle (mais précise!) comment arriver de la configuration initiale à la configuration de la question précédente : c'est-à-dire, à partir de la configuration avec z sur la première bande (la deuxième bande étant vide), positionner la tête de la première bande sur la case $|z|/2 + 1$ en vérifiant que la longueur de z est paire.

Exercice 4 (7 points) 1. Soit M une MT déterministe à une bande finie à gauche. Décrivez de façon informelle (mais précise!) comment simuler M par une MT M' à une bande qui ne réécrit jamais l'entrée.

Indication : La MT M' dépend de M , mais aussi du mot d'entrée de M .

2. Utilisez la question précédente pour donner une réduction du problème de l'arrêt au problème suivant :

Entrée : MT M à une bande et entrée w .

Question : Est-ce que M réécrit au moins un symbole de w au cours de son calcul ?

3. Déduisez que le problème de la question précédente n'est pas décidable.

Exercice 5 (8 points) On rappelle la définition du langage *universel*

$$L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid \text{la MT } M \text{ accepte } w \in \{0, 1\}^*\},$$

$\langle M \rangle \in \{0, 1\}^*$ étant un codage fixé de la MT M .

1. Le langage universel est-il semi-décidable? Justifiez votre réponse.
2. Le langage universel est-il décidable? Justifiez votre réponse.
3. Montrez pour tout langage $L \subseteq \{0, 1\}^*$:

L est semi-décidable *si et seulement si* L se réduit à L_u .

Rappel : la classe **NP** contient les langages acceptés par MT non-déterministes, dont le temps de calcul est polynomial.

Le langage suivant est la version “polynomiale” du langage universel :

$$L_u^p = \{ \langle M \rangle \# w \# \underbrace{1 \cdots 1}_n \mid \text{la MT } M \text{ accepte } w \in \{0, 1\}^* \text{ en au plus } n \text{ pas} \}.$$

4. Le langage L_u^p est-il décidable ? Justifiez votre réponse.

5. Montrez pour tout langage $L \subseteq \{0, 1\}^*$:

L appartient à **NP** si et seulement si L se réduit à L_u^p par une réduction polynomiale.

Exercice 6 (3 points) Soit $L \in \{0, 1\}^*$. On définit $\text{Mid}(L)$ par :

$$\text{Mid}(L) = \{ u \in \{0, 1\}^* \mid \text{il existe } v \in L, u' \in \{0, 1\}^* \text{ t.q. } v = uu' \text{ et } |u| = |u'| \}$$

Montrez que si L est semi-décidable alors $\text{Mid}(L)$ est semi-décidable.

Exercice 7 (5 points) Pour le problème *Couverture par sommets* on prend en entrée un graphe $G = (V, E)$ (V ensemble de sommets et E ensemble d’arcs) et un entier k . On veut savoir s’il existe un ensemble $U \subseteq V$ de taille au plus k tel que pour chaque arc $(u, v) \in E$, au moins une extrémité est dans U , c’est-à-dire $\{u, v\} \cap U \neq \emptyset$. On appelle un tel ensemble U une *couverture*.

Dans cet exercice on construit une réduction polynomiale de *Couverture par sommets* au problème SAT (satisfaisabilité des formules booléennes propositionnelles). La formule φ_G associée au graphe G sera la conjonction des trois formules demandées ci-dessous.

La formule φ_G a $k|V|$ variables booléennes de la forme $x_{v,i}$, pour $v \in V$ et $1 \leq i \leq k$. On veut que la variable $x_{v,i}$ prend la valeur “vrai” si le sommet v est le i -ème élément de la couverture.

1. Ecrivez une formule propositionnelle qui exprime que pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, il y a au moins un sommet qui est le i -ème élément de la couverture.
2. Ecrivez une formule propositionnelle qui exprime que pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, il n’y a pas deux sommets différents qui sont le i -ème élément de la couverture.
3. Ecrivez une formule propositionnelle qui exprime que pour chaque arc $\{u, v\} \in E$, au moins une extrémité est dans la couverture.