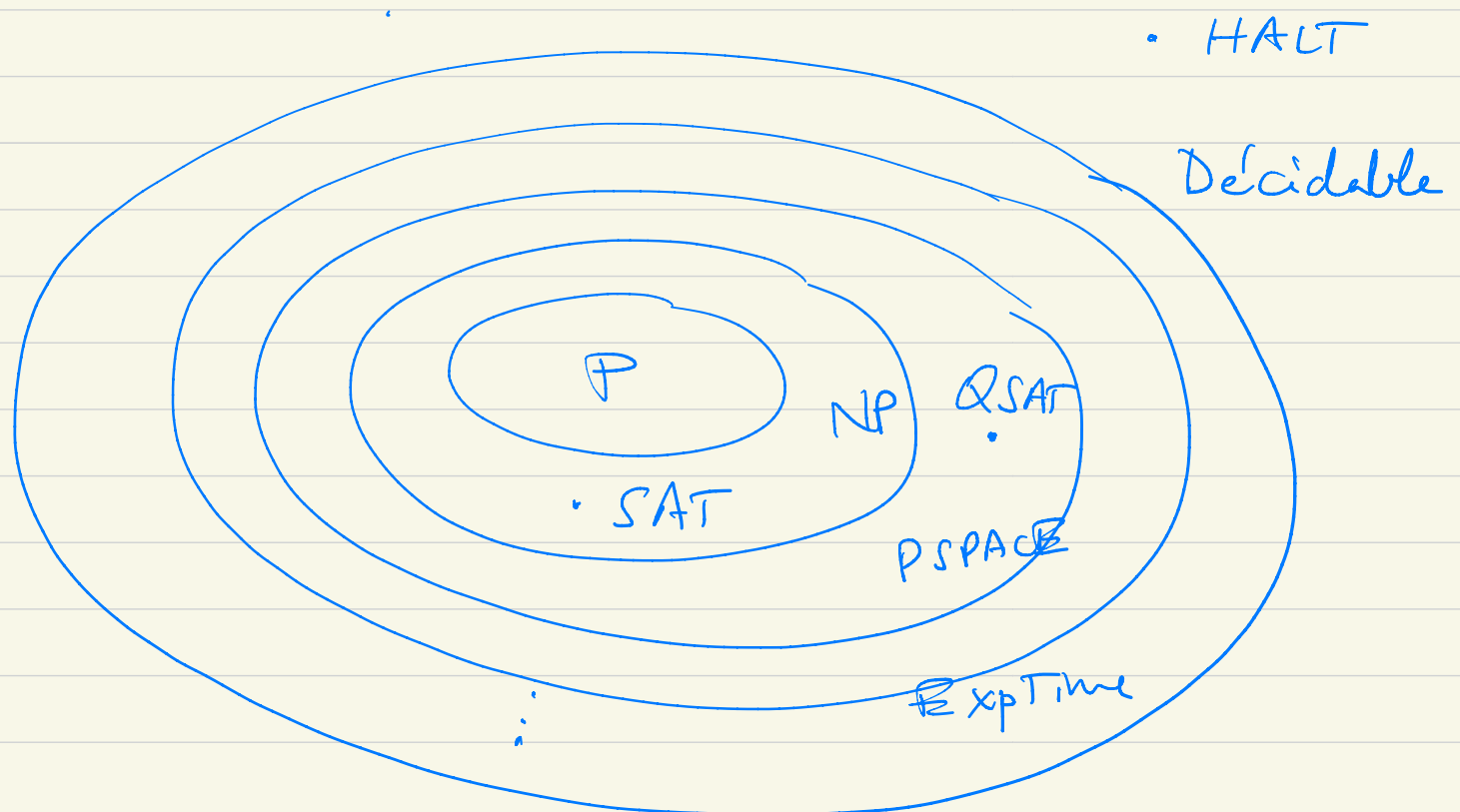



Calculabilité

- qu'est-ce que signifie "calculable"?
- existence de fonctions non-calculables
- dénombrable / non-dénombrable
- modèles de calcul
- problèmes décidables / indécidables
- problème de terminaison (HALT)
- Rice



L'intervalle $(0,1)$ n'est pas dénombrable (argument de Cantor).

Par contradiction :

on suppose que

$$X = \{ r \in \mathbb{R} : 0 < r < 1 \}$$

est dénombrable, donc

$$X = \{ r_1, r_2, r_3, \dots \}$$

On peut mettre X dans un tableau, où la i -ème ligne correspond à r_i ; à la position (i, j) du tableau

on met le jème chiffre après virgule de r_i .

ex

r_1	1	2	9	3	4	...
r_2	8	2	4	...		
r_3	3	3	6	...		
r_4						
$\vdots$						

X

$$r_1 = 0,12934 \dots \quad r_3 = 0,336 \dots$$

$$r_2 = 0,824 \dots$$

On déf. un nombre réel

$$0 \leq r < 1 \quad \text{tq.} \quad r \notin X \quad \text{par}$$

diagonalisation : $r[j] \neq r_j[j]$
 $\Rightarrow r \neq r_j$

Ceci contredit

$$X = \{ r_1, r_2, \dots \}$$

$\mathbb{Z}$

$$= \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots \}$$

$\mathbb{N}$

0	0	0	0	= 0
2	0	0	0	
1	0	0	0	
4				
3				
:				
:				
:				

1 1 1 pas un entier

IF ($x=0$) THEN P ELSE Q FI

est LOOP-calculable (si P, Q
sont LOOP-calc.)

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

|| $\text{sgn} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
est LOOP-calc..

Pour IF-THEN-ELSE :

		$x > 0$		$x = 0$
[	$y := \text{sgn}(x)$	1		0
	$z := 1 - y$	0		1
	<u>LOOP</u> (z) <u>DO</u> P <u>OD</u>			
	<u>LOOP</u> (y) <u>DO</u> Q <u>OD</u>			